RME

Revista Metáfora Educacional

(ISSN 1809-2705) - versão on-line

E-mail: rev_metafora_educacional@hotmail.com

BRASIL - (00+XX+55+75+3614 7252)

Macroprojeto ***Bio-Tanato-Educação: Interfaces Formativas***

Projeto de Criação e Editoração do Periódico Científico Revista Metáfora Educacional (ISSN 1809-2705) – versão *on-line,* de autoria da Prof.ª Dra. Valdecí dos Santos.

Editora: Prof.ª Dra. Valdecí dos Santos (Líder do Grupo de Pesquisa (CNPq) ***Bio-Tanato-Educação: Interfaces Formativas***) - http://lattes.cnpq.br/9891044070786713

http://www.valdeci.bio.br/revista.html

Revista indexada em:

NACIONAL

WEBQUALIS - http://qualis.capes.gov.br/webqualis/principal.seam **-** da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior / Ministério de Educação - Brasil), em **nove** (atualizado em 27/out./2013) subáreas do conhecimento (conforme tabela da CAPES/2012): Ciências Biológicas: Ciências Biológicas II (**C**), Ciências Humanas: História (**B4**), Ciências Humanas: Geografia (**B4**), Ciências Humanas: Psicologia (**B3**), Ciências Humanas: Educação (**B4**), Linguística, Letras e Artes: Letras/Linguística (**B4**), Linguística, Letras e Artes: Artes/Música (**B5**), Multidisciplinar: Ensino: Ensino de Ciências e Matemática (**B2**), Multidisciplinar: Biotecnologia (**C**).

GeoDados - http://geodados.pg.utfpr.edu.br

INTERNACIONAL

CREFAL (Centro de Cooperación Regional para la Educación de los Adultos en América Latina y el Caribe) - http://www.crefal.edu.mx

DIALNET (Universidad de La Rioja) - http://dialnet.unirioja.es

GOOGLE SCHOLAR – http://scholar.google.com.br

IRESIE (Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa. Base de Datos sobre Educación Iberoamericana) - http://iresie.unam.mx

LATINDEX (Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal) - http://www.latindex.unam.mx

REBIUN (Red de Bibliotecas Universitarias Españolas) - http://www.rebiun.org

n. 16 (jan. – jun. 2014), 1 jun. 2015 – Ensino de Matemática

Artigo recebido em 18/fev./2015. Aceito para publicação em 24/abr./2015. Publicado em 1/jun./2015.

Como citar o artigo:

IGLIORI. Sonia Barbosa Camargo; ALMEIDA, Marcio Vieira de. Abordagens de ensino para conceitos do cálculo diferencial e integral. **Revista Metáfora Educacional** (ISSN 1809-2705) – versão *on-line.* Editora Dra. Valdeci dos Santos. Feira de Santana – Bahia (Brasil), n. 16 (jan. – jun. 2014), 1 jun. 2015, p. 44-63. Disponível em: <http://www.valdeci.bio.br/revista.html>. Acesso em: DIA mês ANO.

n. 16 (jan. – jun. 2014), 1 jun. 2015 – Ensino de Matemática

ABORDAGENS DE ENSINO PARA CONCEITOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

TEACHING APPROACHES TO CONCEPTS OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Doutora em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP
Professora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Líder do Grupo de Pesquisa O elementar e o superior em Matemática
E-mail: sigliori@pucsp.br

Marcio Vieira de Almeida
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP
Mestrando bolsista CAPES da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP
E-mail: marcioalmeidasp@gmail.com

RESUMO

Este artigo trata de estratégias do ensino para os conceitos de função, continuidade, diferenciabilidade e equação diferencial. São estratégias que se apóiam em referências teóricas elaboradas por David Tall e seus colaboradores. Para os conceitos de continuidade e diferenciabilidade é explorada a noção de retidão local que auxilia a desenvolver a conceituação formal. É enfatizado o exemplo de uma função contínua não diferenciável em todos os pontos de seu domínio. Para o conceito da equação diferencial $y' = f(x, y)$ é explorada a abordagem qualitativa de busca de solução, a partir da análise de seu campo de direções. Uma característica comum às abordagens é a utilização do computador. Espera-se com o artigo contribuir com a divulgação do trabalho de Tall entre os professores e/ou pesquisadores envolvidos com o ensino do Cálculo. Palavras-chave: Ensino do Cálculo. David Tall. Tecnologia da Informação e Comunicação. GeoGebra. Educação Matemática.

ABSTRACT

This paper deals with teaching approaches of function, continuity, differentiability and differential equations. These approaches are referenced in theoretical elements developed by Tall and his colleagues. For the concepts of continuity and differentiability, it is explored the notion of local straightness which helps to develop a formal conceptualization. It is emphasized an example of a continuous everywhere but differentiable nowhere function. For the concept differential equation $y' = f(x, y)$ is explored a qualitative approach to seeking the solutions, which begins from the analysis of their field directions. A common feature of these approaches is the use of the computer. We expected that the article may contribute to spread the Tall's work between the teachers and/or researchers involved with the teaching of calculus. Key-words:

Teaching of Calculus. David Tall. Information and Communication Technology. Geogebra. Mathematics Education.

INTRODUÇÃO

Este artigo tem por alvo a investigação sobre o ensino e a aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente os conceitos de função real, continuidade, diferenciabilidade e equação diferencial. Esses conceitos são referenciados nos trabalhos de David Tall e seus colaboradores.

As atividades propostas, neste artigo, foram implementadas no *software* de Geometria Dinâmica, GeoGebra, levando-se em conta que é gratuito, possui interface simples e intuitiva e possibilita trabalhar conjuntamente a Geometria, a Álgebra e o Cálculo. Esse *software* é munido das ferramentas necessárias para o desenvolvimento das atividades, não necessita de computadores "poderosos" e possui uma versão *mobile* para dispositivos móveis (como *tablets* e, futuramente, para *smartphones*) e possibilita a elaboração e modificação de *applets*, tanto para uso em sala de aula quanto para disponibilizar em *websites* da *internet*.

Tall, *Professor* Emérito em Pensamento Matemático da Universidade de Warwick, é desde a metade da década de setenta, um dos principais articuladores da área de pesquisa que se tornou conhecida por Pensamento Matemático Avançado, cujas questões giram em torno das dificuldades encontradas na aprendizagem dos conceitos de disciplinas do Ensino Superior, como Cálculo Diferencial e Integral, Análise Real e Álgebra Linear (REZENDE, 2004, p. 23).

Num primeiro momento, Tall nomeou as abordagens desenvolvidas, em sua tese de doutoramento em Educação (TALL, 1986), por abordagens cognitivas sendo essas definidas do seguinte modo:

> […] uma abordagem para o currículo que leva em consideração o estado atual cognitivo do aprendiz e as estruturas do domínio do conhecimento de maneira apropriada para a aprendizagem chamarei de *abordagem cognitiva* (TALL, 1986, p. 71, tradução nossa, grifo do autor).

Posteriormente, em Tall (2010), ele denominou outro tipo de abordagem, indicada como:

> Uma abordagem sensível ao cálculo é construída na evidência de nossos sentidos humanos e utiliza esses insights como uma base significativa para vários desenvolvimentos posteriores, do cálculo prático para aplicações para o desenvolvimento teórico na analise matemática e até a abordagem lógica na utilização dos infinitesimais. (TALL, 2010, p. 1, tradução nossa).

O computador pode contribuir para o desenvolvimento de uma abordagem com as características anteriores, visto que por meio de *softwares* adequados é possível desenvolver materiais significativos para um dado domínio de conhecimento levando em consideração os obstáculos conhecidos e procurando resolver eventuais conflitos cognitivos de forma adequada (TALL, 1986, p. 71). A potencialidade da utilização dos computadores no ensino dos tópicos avançados da Matemática e no que se refere à aprendizagem é reforçada pelo pesquisador inglês, quando diz que é possível

> [...] utilizar os computadores para visualizar conceitos matemáticos de maneira útil seja no Cálculo e na Análise. A utilização criativa dos *softwares*, que plotam gráficos, e das calculadoras gráficas tem permitido aos estudantes lidar de maneira significativa com conceitos como a diferenciação por meio da noção de "retidão local", integração por meio da soma de áreas, e resolver equações diferenciais (de 1.ª ordem) por meio da visualização da construção das curvas solução com um gradiente dado. Durante esse tempo, me tornei cada vez mais consciente do conceito imagem limitado oferecido por gráficos plotadores de gráficos que só desenham gráficos razoavelmente suaves dados por fórmulas (TALL, 1993, p. 2, tradução nossa).

Nessa perspectiva, um computador, munido de um *software* adequado, pode ser utilizado "para propiciar imagens que auxiliarão no desenvolvimento de tópicos do Cálculo e da Análise" (ALMEIDA, 2013, p. 114).

Em Tall (2000), foi apresentada outra característica, que determinados ambientes computacionais possuem, e pode ser utilizada para o desenvolvimento cognitivo dos aprendizes. Tall diz que os computadores:

> [...] podem executar quaisquer algoritmos de forma rápida e eficiente, além de exibir o resultado final com uma gama de diferentes representações. Por exemplo, os resultados podem ser representados visualmente e manipulados fisicamente. Utilizando um mouse é possível ao estudante construir relações corporificadas que fazem parte de uma estrutura conceitual mais rica e ampla (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa).

Softwares, que provêm um retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário, são denominados pelo pesquisador como organizadores genéricos[1]. Um organizador genérico é definido como "um ambiente (ou micromundo[2]) que permite ao aprendiz manipular *exemplos* e (se possível) *contraexemplos* de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados" (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor). O pesquisador considera parte de desenvolvimento de abordagens cognitivas a utilização de organizadores genéricos, pois elas "dão ao aprendiz experiências apropriadas de modo que ele está cognitivamente pronto para novos conceitos matemáticos quando eles são introduzidos" (TALL, 1986, p. 5, tradução nossa).

Para o desenvolvimento de um organizador genérico é necessário selecionar uma ideia importante e essencial, que será o foco da atenção do estudante. Essa não é, necessariamente, fundamental para a teoria matemática, porém, ela auxilia o sujeito a desenvolver intuições apropriadas ao desenvolvimento teórico. Segundo essas características, Tall formulou a noção de raízes cognitivas como:

---

[1] Tradução do termo original *generic organisers*.

[2] Esse termo é utilizado pelo pesquisador no sentido que Papert como um mundo autossuficientes no qual certas questões são relevantes e outras não.

> [...] uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento, no entanto deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e desenvolvimento teórico futuro (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa).

No artigo (TALL, 2001) é destacada a importância dos aspectos sensório-motores e visuais, na composição do pensamento matemático e que esses aspectos atuam, de maneira importante, numa interface na qual o computador é utilizado. Por meio de ações simples, como, por exemplo, clicar em determinado local ou utilizar o teclado para atribuir um valor a uma variável, se pode fornecer suporte para o desenvolvimento de conceitos teóricos de alto nível (TALL, 2001, p. 211).

A manipulação simbólica, que foi ampliada na década de 80, é outra característica dos ambientes computacionais destacada pelo pesquisador inglês. Com essa característica, a possibilidade de efetuar cálculo numérico pelos computadores foi aprimorada. Além disso, naquela época, Tall nos revela que:

> Havia a crença generalizada de que o computador poderia acabar com toda a desordem desnecessária de cálculos e manipulações, permitindo ao indivíduo se concentrar mais em ideias essenciais (TALL, 2001, p. 212, tradução nossa).

Um dos perigos revelados pelo pesquisador na utilização de determinados *softwares*, que realizam manipulações simbólicas, é que apesar deles reduzirem o "fardo" das manipulações simbólicas ao sujeito, eles podem substituir um procedimento realizado com lápis e papel por uma sequência de teclas digitadas (TALL, 2001, p. 213). Com o intuito de reduzir a tensão cognitiva do aprendiz em um currículo de Matemática que utiliza o computador, Tall formulou o Princípio da Construção Seletiva[3]. Com esse princípio, o educador deve elaborar um ambiente no qual o aprendiz possa se envolver com determinada parte da teoria, ao passo que determinados processos subjacentes, que não são o objetivo do educador, naquele momento, são executados pelo computador (TALL, 2001, p. 213). Um exemplo de utilização desse princípio, relatado por Tall, aconteceu na pesquisa de Gray e Pitta (1997 *apud* TALL, 2001). No trabalho com um dos sujeitos, o *software* realizava os cálculos e o sujeito concentrava-se nas relações numéricas apresentadas e não nos processos de contagem que faziam parte de repertório de suas estratégias.

Outra característica valiosa dos ambientes computacionais é que com eles é possível desenvolver atividades de experimentação. Por meio de atividades adequadas, o sujeito pode observar determinado fenômeno e atribuir sentido a ele, o que pode auxiliá-lo no desenvolvimento das propriedades matemáticas envolvidas naquelas atividades (TALL, 2001, p. 225).

Entretanto, Tall chama atenção para um importante aspecto que deve ser considerado quando a tecnologia é utilizada para o desenvolvimento da Matemática:

> As experiências possibilitam desenvolver aspectos perspicazes que apoiam a teoria, mas também podem levar a uma variedade de outras imagens mentais que podem ser diferentes das ideias matemáticas atualmente consideradas por

[3] Tradução para o termo original *The Principle of Selective Construction*.

especialistas (TALL, 2001, p. 230, tradução nossa).

No decorrer deste trabalho, são apresentados elementos, desenvolvidos por David Tall e seus colaboradores, para o desenvolvimento de abordagens de ensino para os conceitos de função real, continuidade, diferenciabilidade e equação diferencial. Esses elementos já foram implementados pelo pesquisador inglês utilizando outras plataformas, como o *software Graphic Calculus*, desenvolvido pelo próprio pesquisador e outros. Neste trabalho esses elementos são implementados no *software* GeoGebra, pelas caraterísticas citadas anteriormente, com vistas a facilitar a utilização das ideias desenvolvidas por David Tall por pesquisadores e pessoas interessadas pela Educação Matemática no Ensino Superior.

Este artigo apresenta elementos teóricos desenvolvidos por Tall e seus colaboradores, três pesquisas nacionais que abordaram o conceito de função, com vistas a expor dificuldades relacionadas à aprendizagem desse conceito e considerações de David Tall de como um *software* pode ser utilizado na construção de funções definidas por mais de uma sentença, com vistas a enriquecer o conceito imagem do aprendiz com relação a esse conceito. Para os conceitos de diferenciabilidade e continuidade são apresentados a noção de retidão local, que segundo o pesquisador é uma raiz cognitiva apropriada, e o exemplo da função “manjar branco”, um exemplo de função contínua não diferenciável em todos os pontos do domínio. Por último é tratado o conceito de equação diferencial, quando é exposta a maneira pela qual o pesquisador inglês sugere a apresentação desse conceito e uma aplicação, construída no GeoGebra, para o esboço do campo de direções associado à solução de uma equação diferencial ordinária. Nas considerações finais foram expostas reflexões de como a abordagem qualitativa pode estimular uma discussão sobre as curvas soluções da equação.

O CONCEITO DE FUNÇÃO

Nesta seção são expostas três pesquisas nacionais que abordam o conceito de função, com vistas a expor dificuldades relacionadas à aprendizagem desse conceito. Posteriormente, são apresentadas considerações de David Tall de como um *software* pode ser utilizado na construção de funções definidas por mais de uma sentença, com vistas a enriquecer o conceito imagem do aprendiz, com relação ao conceito de função.

Na pesquisa de Barbosa (2009) buscou, baseando-se no construto teórico seres-humanos-com-mídias, compreender como um coletivo formado por alunos-com-tecnologia (BARBOSA, 2009, p. 16), produz conhecimento acerca dos tópicos funções compostas e regra da cadeia, de funções de uma variável real, a partir de uma abordagem gráfica. Como parte do levantamento bibliográfico de Barbosa (2009), foi destacado o artigo de Tall e DeMarois (1996 *apud* BARBOSA, 2009), no qual o termo faceta foi considerado para fazer referência aos diferentes aspectos do conceito de função. As facetas desse conceito estão relacionadas aos vários modos de comunicá-lo, por meio da linguagem verbal, escrita, gestos, formas coloquiais, e representá-lo, com a notação usual, ou utilizando aspectos numéricos, simbólicos e geométricos. Este estudo trouxe a seguinte faceta, indicada por Barbosa em sua tese, que abordagem do tópico composição de funções enfatiza apenas a representação algébrica (BARBOSA, 2009, p. 65).

Em Ardenghi (2008) foi realizado um panorama, sobre o estudo de funções, composto dos seguintes documentos: dissertações e teses desenvolvidas no Brasil, dois artigos internacionais e um capítulo de um livro, no período de 1970 a 2005. O objetivo do pesquisador foi investigar dificuldades de alunos, relacionadas ao conceito de função, observadas tanto na experiência de ensino desse conceito, por parte do pesquisador, quanto em outras pesquisas da área da Educação Matemática. Como resultado das análises depreendidas foi detectado, que tanto professores quanto livros apresentam o conceito de função utilizando-se de uma linguagem técnica e distante da realizada pelo aprendiz; que os resultados das pesquisas não têm sido incorporados aos livros didáticos e que obstáculos podem ser gerados se as abordagens de ensino não favorecem as conversões entre os vários registros de representação de uma função.

A terceira pesquisa (COSTA, 2004) apresentou um estudo, de caráter diagnóstico, cujo intuito foi investigar conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função. Os sujeitos foram oito estudantes de um curso de Licenciatura de uma universidade pública do Estado do Pará. A análise dos dados norteou-se pelos elementos teóricos conceito imagem e conceito definição elaborados por Vinner os quais, contou, em determinado momento, com a participação de Tall. Como parte do levantamento bibliográfico dessa pesquisa, foram constadas dificuldades relacionadas ao conceito de função: uma dessas, expostas por Even (1988 *apud* BAKAR; TALL, 1992), demonstra dois efeitos da exposição da definição de função advinda da Teoria de Conjunto, no ensino desse conceito: o primeiro é que os sujeitos ignoram a natureza arbitrária da relação entre dois conjuntos, exposta na definição; o segundo é que para os sujeitos todas as funções deveriam ser representadas por uma única expressão. Em outro artigo (DREYFUS; VINNER, 1989 *apud* KIERAN, 1992), foi constatada rejeição, por parte do estudante, da definição formal do conceito de função.

Tall ressalta que com o uso de *softwares* adequados é possível favorecer a visualização de representações de conceitos matemáticos, com as quais alunos podem constituir de maneira significativa um conceito da Matemática. Contudo, o pesquisador alerta para um perigo, existente na utilização de determinados *softwares* que plotam gráficos, pois eles podem levar o sujeito a desenvolver um conceito imagem[4] limitado, visto que podem ser utilizados para "desenhar gráficos razoavelmente suaves dados por fórmulas" (TALL, 1993, p. 2, tradução nossa).

Exatamente, nesse sentido foi mostrado detalhadamente em Igliori e Almeida (2014b), que o GeoGebra, por meio do comando predefinido "Se", é possível plotar gráficos de funções que são dadas por duas (ou mais) sentença, como, por exemplo: $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida assim:

$$f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{se } x\le 1 \\ x^2 & \text{se } x>1 \end{cases} \qquad (1)$$

Na Figura 1, segue a representação gráfica da função *f*, na *janela de visualização* do *software* GeoGebra:

[4] Neste trabalho será considerada a tradução dos termos originais *concept image* e *concept definiton*, por conceito imagem e conceito definição.

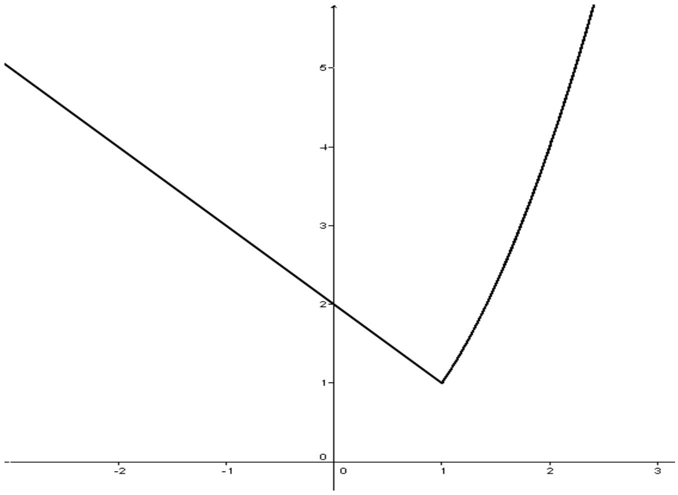


Figura 1 – A representação gráfica da função *f*: ℝ → ℝ, definida anteriormente.
Fonte: Elaboração nossa.

Além disso, por meio de outros comandos existentes no *software*, é possível mostrar aos estudantes que uma função que é dada por uma sentença, a representação gráfica dela não é necessariamente uma curva contínua. Por exemplo, o GeoGebra possui a função predefinida *round*(). Segundo o manual do *software* (HOHENWARTER, 2009, p. 37), esse comando é descrito como arredondar. Ele faz a seguinte operação, para um dado número, essa função associa o número real x ao inteiro mais próximo de x. Ao digitar, no campo de *Entrada*, o comando *round*(x), será esboçado o gráfico da função real, dada pela seguinte sentença $g(x) = \{x\}$. Na *janela de visualização*, aparecerá a representação gráfica da função g:

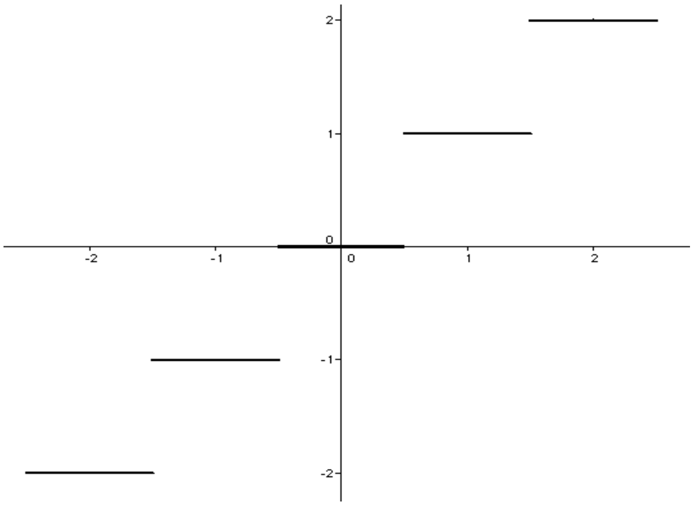


Figura 2 – A representação gráfica da função g, dada pela sentença $g(x) = \{x\}$.
Fonte: Elaboração nossa.

Com esta seção espera-se contribuir para o desenvolvimento de um conceito imagem, relativo ao conceito de função, rico ao estudante e com as discussões relacionadas à utilização do GeoGebra, no ensino e aprendizagem do conceito de função.

A CONTINUIDADE E DIFERENCIABILIDADE DE UMA FUNÇÃO REAL

Nesta seção será apresentada a noção de retidão local, que é definida pelo pesquisador inglês como uma raiz cognitiva apropriada para o conceito de derivada. Essa está baseada na percepção de quanto maior a ampliação menor será a curvatura (TALL, 1989). Tal noção seria apropriada ao conceito de derivada, pois ela "permite que a inclinação da função seja vista como a mudança de inclinação do próprio gráfico" (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa, grifo do autor). Nesse sentido, a representação gráfica de função diferenciável, quando ampliada em determinada porção, assemelha-se localmente a um segmento de reta. Observe a Figura 3, nela é possível perceber que uma curva diferenciável, localmente, assemelha-se a um segmento de reta:

Figura 3 – Uma pequena parte da curva assemelhasse a um segmento de reta.
Fonte: Tall (2010, p. 11).

Em um ambiente computacional, Tall elaborou o organizador genérico *Magnify*, que faz algo similar ao feito na figura anterior: "[...] permite ao usuário focar sua atenção no gráfico e traçar uma parte ampliada dele numa segunda janela" (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa). Na Figura 4 é utilizado esse *software* para a função real dada pela seguinte sentença $g(x)$ = sen x:

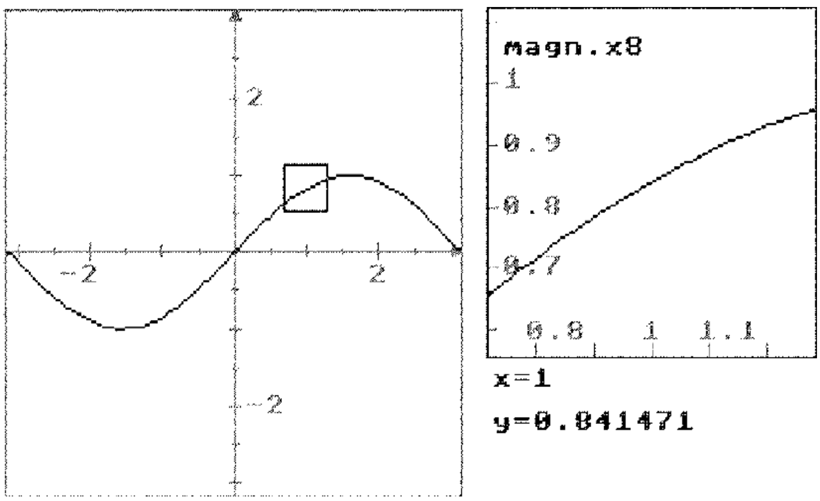


Figura 4 – A utilização do organizador genérico Magnify.
Fonte: Tall (2010, p. 12).

Com relação aos conceitos de continuidade e diferenciabilidade de uma função real, é conhecido o seguinte resultado: Seja f: $X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, se f é diferenciável em x_0 então f é contínua em x_0. A recíproca desse resultado é falsa, pois existem funções contínuas em determinado ponto do domínio, que não é diferenciável nesse ponto. Em geral, o contraexemplo para a recíproca do teorema é a função modular, ou seja, a função real definida pela $h(x) = | x |$. Em $x = 0$, ela é uma função contínua, mas não é diferenciável em 0, pois o $\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$ não existe. No entanto, essa é uma função em que a diferenciabilidade não é garantida apenas em um ponto, o ponto zero. Já um exemplo de uma função contínua e não diferenciável em nenhum ponto de seu domínio causa desconforto, e não é comumente apresentado.

Pela retidão local, é possível inferir que uma função que é contínua num determinado ponto, e não diferenciável nele, localmente, possui uma representação gráfica, que não se assemelha a um segmento de reta. Por exemplo, considere a função real dada pela seguinte sentença $m(x) = x^{\frac{2}{3}}$. A representação gráfica dessa função, numa vizinhança de 0, é a seguinte:

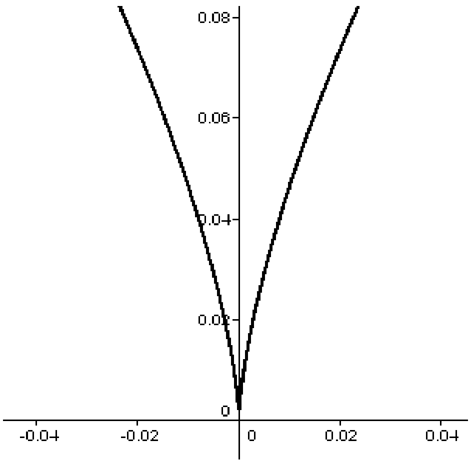


Figura 5 – O gráfico da função m, dada pela sentença $m(x) = x^{\frac{2}{3}}$, numa vizinhança de 0.
Fonte: Elaboração nossa.

Nessa vizinhança o gráfico da função não se assemelha a uma linha reta, então para concluir que a função m não é diferenciável em $x = 0$ é preciso verificar que o $\lim_{x \to 0} \frac{m(x) - m(0)}{x - 0}$ não existe ou é infinito. Fato que é comprovado, porque os limites laterais, pela direita e pela esquerda, não são finitos.

Com essas reflexões, o pesquisador inglês desenvolveu um estudo da função “manjar branco”[5]. A partir desse exemplo, segundo David Tall, é possível formular “uma explicação conceitual da continuidade e da diferenciabilidade que é formalmente correta e tem uma interpretação pictórica adequada” (TALL, 1982, p. 11, tradução nossa).

Por meio da noção de retidão local seria possível estimular a imaginação do estudante a conceber como seria a representação gráfica tanto de uma função diferenciável, quanto de uma

[5] Tradução do termo inglês *blancmange function*, que segundo Tall (1982) foi cunhado por John Mills.

função não diferenciável, em determinado ponto do domínio. Para que isso ocorresse, a representação gráfica dessa função deveria permanecer “com bicos”, não importando o quanto essa função fosse ampliada.

A função “manjar branco”, denotada por *b*, é uma função cujo domínio é o intervalo fechado [0,1] e contradomínio o conjunto dos números reais, e é definida em cada ponto de seu domínio como o limite da série de funções nesse ponto, isto é:

$$b(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \qquad (2)$$

O termo geral da sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ é $f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f(2^{n-1} \cdot x)$ sendo *f*, uma função real de uma variável real definida por $f(x) = |x - \{x\}|$[6].

Na figura 6, é apresentada a representação gráfica da soma parcial dos trinta primeiros termos da sequência de funções, cujo limite é a função “manjar branco”, sendo que essa foi detalhada em Igliori e Almeida (2014a).

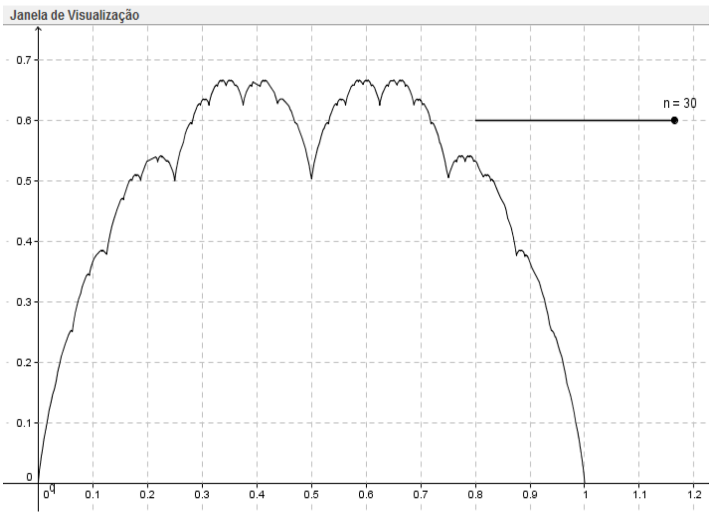


Figura 6 – A representação da soma parcial $\sum_{i=1}^{30} f_i(x)$, sendo que $(f_n)_{n\in N}$ é a sequência de funções.

Fonte: Os autores.

No ponto de vista do pesquisador inglês, por meio do exemplo da função “manjar branco” seria possível formular “uma explicação conceitual da continuidade e da diferenciabilidade que é formalmente correta e tem uma interpretação pictórica adequada” (TALL, 1982, p. 11, tradução nossa).

[6] Sendo que $\{x\}$ denota a imagem da função real { }, que é definida do seguinte modo: sabe-se número real *x* pode ser escrito como $x = z + d$, com $z \in \mathbb{Z}$, um inteiro fixo, e $d \in [0,1)$. Com isso, essa função é definida pelas sentenças:

$$\{x\} = \{z + d\} = \begin{cases} z & \text{se } 0 \le d < 0{,}5 \\ z+1 & \text{se } 0{,}5 \le d < 1 \end{cases}$$

O CONCEITO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Nesta seção, é apresentada a sugestão do pesquisador inglês para a apresentação do conceito de equação diferencial, ou seja, por meio da construção de seus campos de direção.

Consideramos relevante a apresentação dessa abordagem para o conceito de equação diferencial, pois corroboramos com a posição de Boyce e Di Prima em relação à importância das equações diferenciais para outras áreas do conhecimento:

> A importância das equações diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como por exemplo, o decaimento de substâncias radioativas, o comportamento de sistemas de massas e molas e o comportamento de circuitos elétricos (BOYCE; DIPRIMA, 1999, prefácio).

E Bassanezi (2013) destaca a importância das equações diferenciais como um tópico amplo da Matemática e que pode ser abordado de maneiras diversas, dependendo do objetivo proposto. Esse pesquisador destaca o papel dessas equações para modelar um problema, quando diz que:

> Um problema real não pode ser representado de maneira exata em toda sua complexidade por uma equação matemática ou um sistema de equações. Um modelo deve ser considerado apenas como um retrato ou uma simulação de um fenômeno e sua validação depende muito da escolha das variáveis e das hipóteses formuladas. É muito frequente em se tratando de modelar um fenômeno ou um experimento, obtermos equações para descrever as "variações" das quantidades (variáveis de estado) presentes e consideradas essenciais. Desta forma, as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações. Quando estas variações são instantâneas, a dinâmica do fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas equações diferenciais (BASSANEZI, 2013, p. 61 – 62).

Outro fato que motiva a utilização dessa abordagem, fundamentada na descrição dos campos de direções, é por ser ela qualitativa e possibilitar a exploração do conceito no registro de representação geométrico (ARTIGUE, 1994).

Em Igliori e Oliveira (2013) pode-se encontrar um levantamento de pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais. Dentre os trabalhos analisados encontra-se o trabalho de Javaroni (2007) em que é proposta a abordagem que se utiliza dos campos de direções para a introdução às equações diferenciais ordinárias, nomeada por abordagem qualitativa. Essa abordagem tem por alvo auxiliar a interpretação, por parte dos sujeitos, das soluções das equações diferenciais.

Destaca-se também como vantagem da apresentação exposta neste trabalho o fato de livros de Cálculo, editados atualmente, como Stewart (2005) e Anton, Bivens e Davis (2007), utilizam de representações de campos de direção. Para exemplificar, no capítulo 9 de Stewart (2005), após apresentar a definição de uma equação diferencial, a ordem de uma equação diferencial e dois exemplos de modelagem, cujo modelo é uma equação diferencial, o autor apresenta os campos de direção como uma maneira pela qual é possível "aprender muito sobre a solução [de uma equação diferencial] através de uma abordagem gráfica (campos de direção)" (STEWART, 2005, p. 586, adaptado), mesmo quando não é possível obter uma solução analítica da equação diferencial.

David Tall sugere a apresentação desse conceito por meio da seguinte situação problema:

> Considere o problema inverso da diferenciação (Não, esse não é a integração!). O problema é o seguinte – se você conhece a inclinação de uma função em qualquer ponto, como poderíamos construir o gráfico que tem essa inclinação? (TALL, 2000, p. 14, tradução nossa).

E atribuiu um significado corpóreo para o conceito das equações:

> Se eu apontar meu dedo em um ponto (x, y) qualquer do plano, então eu posso calcular a inclinação da curva solução naquele ponto como $m = F(x, y)$ e traçar um segmento de reta pequeno com inclinação igual a m através do ponto (x, y) (TALL, 2000, p. 14, tradução nossa).

Com relação ao significado corporificado proposto, o pesquisador desenvolveu um *software* que constrói a solução gráfica de uma equação diferencial de 1ª ordem do seguinte modo: o *mouse* é utilizado para mover um segmento, cuja inclinação é definida pela equação diferencial, dada pelo usuário, e com um clique sobre o plano cartesiano, esse segmento é fixado (BLOKLAND, GIESSEN, TALL, 2000 *apud* TALL, 2001, p. 211). Na Figura 7 está representada a tela desse *software*:

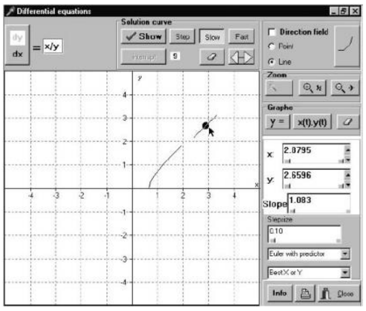


Figura 7 – Exemplo de *software* que explora a solução de uma equação diferencial.
Fonte: BLOKLAND, GIESSEN, TALL, 2000 apud TALL, 2001, p. 211.

Neste artigo é aprestada uma situação similar à proposta pelo pesquisador inglês, que pode ser construída no GeoGebra. Até o presente momento, não foi possível construir uma aplicação idêntica à proposta pelo pesquisador inglês com as ferramentas disponíveis no *software*. Pelo apresentado em Igliori e Almeida (2014c) é possível construir, num conjunto do plano cartesiano, o campo de direções associado a uma equação diferencial, na forma normal, que é dada pela seguinte equação:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (3)$$

Sendo f uma função definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ assumindo valores em $\mathbb{R}$.
A equação (3) pode ser expressa também do seguinte modo:

$$y' = f(x, y) \qquad (4)$$

Uma possível interpretação da equação diferencial ordinária é a seguinte: se o ponto (x_0, y_0) pertence à curva solução então a reta tangente a essa curva nesse ponto possui inclinação igual a $f(x_0, y_0)$.

Com isso, chama-se campo de direções da equação (3) o conjunto dos segmentos de retas com inclinação igual a $f(x, y)$. Por exemplo, considere a equação diferencial $y' = 2x$, esboçando o campo de direções associado a ela:

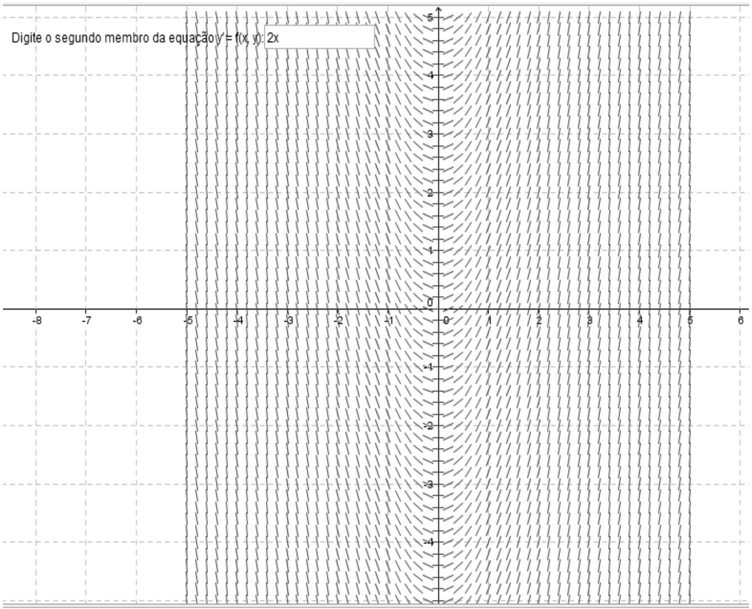
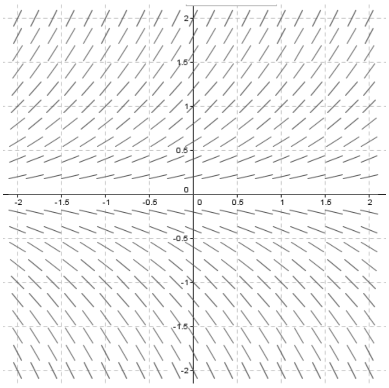


Figura 8 – O resultado final das construções desenvolvidas neste artigo
Fonte: Os autores.

Com a aplicação construída em Igliori e Almeida (2014c), basta que o usuário digite, no campo de *Entrada* (parte superior da Figura 8), existente na *Janela de Visualização*, para que o *software* trace o campo de direções associados à equação diferencial.

A seguir, são apresentados outros exemplos de campos de direção:



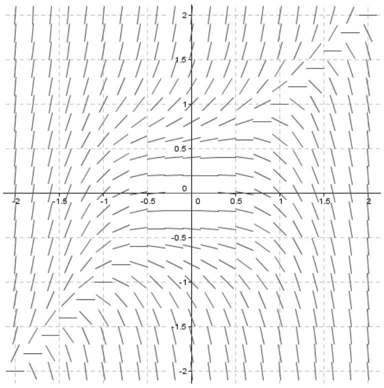


Figura 9 – Os campo de direções associados às equações diferenciais $y' = y$ (figura da direita) e da $y' = y^3 - x^3$ (figura da esquerda).

Fonte: Os autores.

Para exemplificar as possibilidades da utilização dessa abordagem, considere a seguinte equação diferencial linear de 1ª ordem:

$$\frac{dy}{dx} = 9{,}8 - \frac{y}{5} \qquad (5)$$

A forma normal da equação diferencial (5) é dada pela função real de duas variáveis, dada pela sentença:

$$f(x, y) = 9{,}8 - \frac{y}{5} \qquad (6)$$

Independente de não ser conhecida a curva solução da equação diferencial, num primeiro momento, é possível tirar algumas conclusões, como: suponha que o ponto (x_0, y_0) pertencer à curva solução, então o valor da derivada de y_0 no ponto x_0 é igual a $9{,}8 - \frac{y_0}{5}$. Isso é equivalente dizer que a inclinação da reta tangente à curva solução, no ponto (x_0, y_0), é $9{,}8 - \frac{y_0}{5}$. Com isso é possível inferir que independentemente do valor de *x*, o valor da inclinação no ponto (x, y_0) será o mesmo. Portanto, o campo de direções associados à equação diferencial (5) possuirá nos pontos do plano, que possuem mesmo valor de abcissas, segmentos com mesma inclinação.

Estudando o sinal da sentença que define a equação diferencial é possível notar que para $y < 49$, o sinal dela é positivo e isso implica que a medida do ângulo formado pelo segmento de reta, que compõe o campo de direções e o eixo *x* é maior que 0 e menor que $\frac{\pi}{2}$. Analogamente, para $y > 49$, o sinal da expressão é negativo e a medida ângulo formado pelo segmento de reta que compõe o campo de direções e o eixo *x* é maior que $\frac{\pi}{2}$ e menor que π. E nulo para $y = 49$, logo os segmentos de reta que compõem o campo de direções será paralelo ao eixo *x*.

Com auxílio da aplicação construída em Igliori e Almeida (2014c), na Figura 10 foi esboçado o campo de direções associado à equação (5) no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 10 \quad \text{e } 40 \le y \le 60\}$. Com isso é possível confirmar as inferências feitas a partir da análise da expressão analítica, associada à equação diferencial (5).

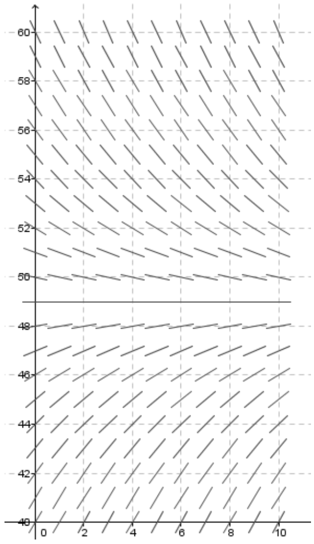


Figura 10 – O campo de direções associados à equação diferencial $y' = 9{,}8 - \frac{y}{5}$.

Fonte: Os autores.

Observando o esboço do campo de direções, no valor para *y* = 49, parece que os segmentos formam uma reta paralela ao eixo *x*. A função real *y*(*x*) = 49 é uma solução da equação diferencial, descrita em (10), e é chamada de **solução de equilíbrio** (BOYCE, DI PRIMA, 1999, p. 2), pois não apresenta variação. Além disso, é possível notar que todas as outras soluções daquela equação diferencial parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando *x* tende a infinito.

Outra sugestão é após expor a maneira analítica de resolver a equação diferencial linear de 1ª ordem, esboçar junto do campo de direções, duas curvas solução da equação diferencial. Para a solução geral do problema é a seguinte:

$$y(x) = 49 + k \cdot e^{-\frac{1}{5}x}\text{, sendo que } k \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Definindo duas condições iniciais e esboçando duas curvas soluções da equação diferencial. Para exemplificar, serão esboçadas as seguintes curvas soluções da equação: $y_1(x) = 49 - 9 \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$ e $y_2(x) = 49 + 11 \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$. Isso tem o objetivo de mostrar que as inferências feitas na abordagem qualitativa estão de acordo com a solução analítica. Na Figura 11, está o esboço das duas curvas, soluções da equação diferencial, junto com o campo de direções.

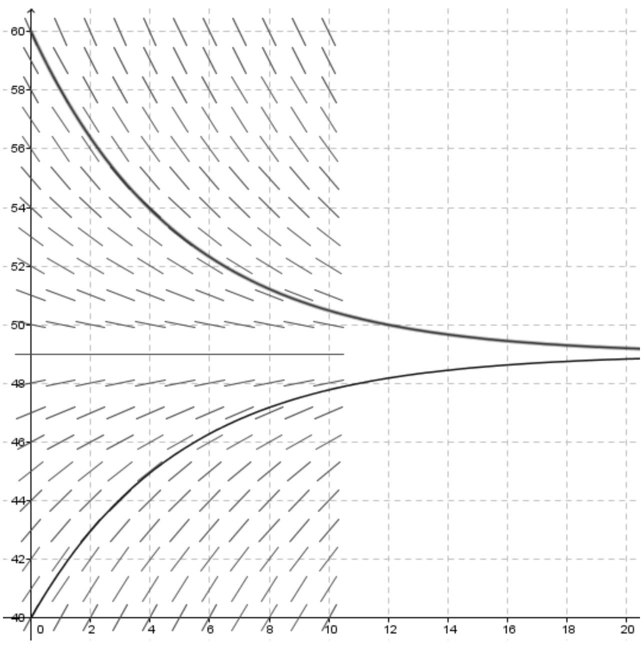


Figura 11 – O campo de direções e duas soluções particulares da equação diferencial $y' = 9{,}8 - \frac{y}{5}$.

Fonte: Os autores.

Nesta seção foi apresentada uma aplicação no GeoGebra para construir o campo de direções associado a uma equação diferencial, num conjunto do plano cartesiano, com vistas a auxiliar o desenvolvimento de uma abordagem gráfica para esse tipo de equação e superar a abordagem essencialmente algébrica, na qual esse conceito tem sido, comumente, apresentado. Esse tipo de abordagem auxilia o sujeito a interpretar possíveis relações existentes entre as equações diferenciais e as suas curvas soluções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo foram apresentadas abordagens de ensino organizadas à luz do que foi desenvolvido por David Tall e seus associados, para o ensino dos conceitos de função, continuidade, diferenciabilidade e equação diferencial. Essas abordagens auxiliam na organização de material de preparação da Matemática para estudantes, conforme Artigue (1994), pois entendemos que o ensino do Cálculo requer o uso de materiais que dê suporte à aprendizagem. Os materiais apresentados neste artigo cumprem essa função na medida em que são elaborados tendo por referência elementos teóricos pensados por um especialista da área para essa finalidade.

O que motivou a produção desses materiais é que foi detectada a necessidade de integrar resultados das pesquisas, conduzidas no campo da Educação Matemática, às práticas de ensino, conforme exposto por Rasmussen, Marrangelle e Borba quando ressaltam que “é fundamentalmente importante que o corpo de pesquisa em ensino, aprendizagem e entendimento do Cálculo contribua com a prática educacional de estudantes que estão matriculados em cursos de Cálculo a cada ano" (RASMUSSEN, MARRANGELLE, BORBA, 2014, p. 507, tradução nossa).

Explorou-se o fato de que as funções podem ser dadas por mais de uma sentença e que uma função definida em uma sentença, no *software*, pode produzir um gráfico que possui infinitos pontos de descontinuidade.

Para os conceitos de continuidade e diferenciabilidade desenvolveu-se um exemplo de função que é contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio, com base na noção de retidão local. Por meio dessa noção é possível ao aprendiz desenvolver elementos que o auxiliem a identificar quando uma função é diferenciável, num dado ponto, a partir do gráfico da função. E possibilita indicar por meio do gráfico que uma função contínua pode não ser diferenciável em todos os pontos de seu domínio.

A construção do campo de direções auxilia o desenvolvimento da abordagem gráfica na busca de soluções de uma equação diferencial, visando apresentar alternativa à exploração usual de apenas a abordagem algébrica, destacando a importância de integrar as duas abordagens.

Outro ponto objetivado no artigo é exibir, para os professores/pesquisadores, ferramentas, comandos e funções predefinidas, disponíveis no *software* GeoGebra com vistas a possibilitar a elaboração de materiais didáticos significativos para o ensino e aprendizagem de conceitos abordados na Educação Superior, em especial do Cálculo Diferencial e Integral.

Espera-se assim que tanto os exemplos analisados quanto as ferramentas exploradas possam ser utilizados em abordagens que contribuam com o desenvolvimento da Educação Matemática no Ensino Superior.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. V. **Um panorama de artigos sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall**. 2013. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Volume I. Tradução Claus Ivo Doering. Bookman, 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ARDENGHI, M. J. **Ensino aprendizagem do conceito de função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

ARTIGUE, M. Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products.BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRÄSSER, R.; WINKELMANN, B. (Eds.) **Didactics of mathematics as a scientific discipline**, v. 13, p. 27-39, 1994.

BAKAR, M; TALL, D. O. Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. **International Journal of Mathematics Education in Science & Technology**, n. 23, vol. 1, p. 39–50, 1992. Disponível em: <http://wrap.warwick.ac.uk/511/1/WRAP_Tall_dot1992c-bakar-ijmest.pdf>. Acesso em 18 fev. 2015.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia**. 2009. 199 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Temas & Modelos**. Santo André: UFABC, 2013.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução de Horácio Macedo. 6. ed. rev. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

COSTA, A. C. **Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função**. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo. São Paulo, 2004.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M. **Ajuda geogebra:** manual oficial da versão 3.2. Tradução e adaptação para português (de Portugal) de António Ribeiro. 2009. Disponível em: <http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf >. Acesso em: 25 jun. 2014.

IGLIORI, S. B. C.; ALMEIDA, M. V. A Utilização do geogebra para a construção da representação de um exemplo de função contínua não diferenciável. JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5. **Anais...** Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo. 2014a. Disponível em <http://www.upf.br/jem/images/trabalhos-2014/comunicacao-cientifica/utilizacao_geogebra.pdf >. Acesso em 18 fev. 2015.

IGLIORI, S. B. C.; ALMEIDA, M. V. A Utilização do geogebra na construção representações de funções reais definidas por mais de uma sentença. ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12. **Anais...** Birigui: SBEM/SBEM-SP, p.1 -14, 2014b.

IGLIORI, S. B. C.; ALMEIDA, M. V. A Utilização do geogebra no ensino de equações diferenciais. **Caderno de Física da UEFS**, 12, nº 02, p. 57-71, 2014c. Disponível em <http://dfis.uefs.br/caderno/vol12n2/a6SoniaMarcioGeoGebra_ED.pdf>. Acesso em 18 fev. 2015.

IGLIORI, S. B. C.; OLIVEIRA, E. A. Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica. **EM TEIA | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, vol. 4 (2), 2013. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/152/pdf_23>. Acesso em: 18 fev. 2014.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica:** possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias. 2007. 231f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2007.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In: **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: NCTM, p. 390-419, 1992.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM**, v. 46, n. 4, p. 507 - 515, 2014.

REZENDE, W. M. (2004) O Ensino de Cálculo: um problema do ensino superior de matemática? Mesa redonda “Educação Matemática no ensino Superior”, **Anais eletrônicos do VIII ENEM**, Pernambuco: UFPE, 2004.

STEWART, J. **Cálculo**. Vol. II. 4 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

TALL, D. O. The Blancmange Function Continuous Everywhere but Differentiable Nowhere. **The Mathematical Gazette**, v. 66, n. 435, p. 11-22, 1982. Disponível em: <http://homepages. warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1982a-blancmange.pdf>. Acesso em: 08 abr. 2014.

______. **Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics**. 1986. 505 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – University of Warwick, Inglaterra, 1986.

______. Concept images, generic organizers, computers and curriculum change. **For the Learning of Mathematics**, 9(3): 37-42, 1989.

______. Real mathematics, rational computers and complex people. In: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN COLLEGE MATHEMATICS TEACHING, 5., 1993, **Procedings**…, Addison-Wesley, p. 243-258, 1993. Disponível em: <http://homepages. warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/ dot1993h-real-rat-cmplx.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2015.

______. Biological brain, mathematical mind & computational computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. **Proceedings**... Blackwood: ATCM Inc, 2000. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/ dot2000h-plenary-atcm2000.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2015.

______. Cognitive development in advanced mathematics using technology. **Mathematics Education Research Journal**, 12 (3), p. 210 – 230, 2001. Disponível em <http://homepages.warwick .ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001b-merj-amt.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2015.

______. A sensible approach to the calculus. Conferência: **The national and international meeting on the teaching of calculus**, Setembro de 2010, Puebla, Mexico. Disponível em <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010a-sensible-calculus.pdf >. Acesso em: 18 fev. 2015.