APROXIMACIÓN A LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR MÉTODOS NO CONVENCIONALES Y EL SOFTWARE MATHEMATICA

Mario Silvino Ávila Sandoval, Carlos López Ruvalcaba, Juan Luna González, Óscar Ruiz Chávez, Sergio Flores García

Departamento de Física y Matemáticas del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

Resumen

El presente trabajo muestra métodos novedosos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales empleando determinantes, el software *Mathematica* y conceptos como límites, y convergencia. Se parte de un problema de movimiento con aceleración constante en el cual, se hace uso de la predicción, los determinantes y los límites para aproximar la solución de la ecuación diferencial implicada. Posteriormente se utiliza como base el Método de Euler y funciones polinomiales para aproximar soluciones.

Palabras clave: *Mathematica*, Método de Euler, Educación, Ecuaciones Diferenciales.

Introducción

El método de enseñanza de las ecuaciones diferenciales, en las universidades es de clase magistral, donde el profesor ocupa un papel protagónico. Prácticamente ningún docente siente la necesidad de usar otro tipo de metodología de la enseñanza. La mayoría de los profesores están convencidos de la idoneidad de los contenidos y que no hay razón para cambiarlos. Podemos decir que la práctica docente es esencialmente instrumentalista, esto es, hace énfasis en los métodos de resolución de tipos de ecuaciones diferenciales integrables y en la resolución de problemas tipo de modelación por ser esto la más sencillo. Esta concepción del profesor muy formalista sobrevalora la manipulación simbólica frente a tratamientos numéricos y gráficos de las ecuaciones diferenciales (*Moreno y Azcárate, 2003*). Este artículo pretende mostrar una posibilidad de allanar las dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales descritas anteriormente.

Funciones polinomiales definidas por determinantes.

Una aplicación importante de los determinantes, es definir una función polinomial en término de algunos puntos pertenecientes a dicha función. Así, la ecuación que determina un polinomio de grado k dados $k+1$ puntos es:

$$\begin{vmatrix} x^k & x^{k-1} & x^{k-2} & \cdots & x & y & 1 \\ x_1^k & x_1^{k-1} & x_1^{k-2} & \cdots & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^k & x_2^{k-1} & x_2^{k-2} & \cdots & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k+1}^k & x_{k+1}^{k-1} & x_{k+1}^{k-2} & \cdots & x_{k+1} & y_{k+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donde $(x_i, y_i), \quad i = 1,2,\ldots,k+1$

son los puntos que satisfacen la ecuación (*Ávila y López, 2009*). Usando la expresión anterior, es posible encontrar el polinomio, por ejemplo de grado 4, que pase por 5 puntos determinados como puede observarse en el ejemplo de la figura 1 desarrollado en *Mathematica*.

In[1]:=

```
x1 = -3;  y1 = 3;  x2 = -2;   y2 = -3;  x3 = 2;  y3 = 4;   x4 = 3;  y4 = 0;
x5 = 5;   y5 = 6;
```

$$\text{expresion} = \text{Det}\left[\begin{pmatrix} x^4 & x^3 & x^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^4 & x_1{}^3 & x_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^4 & x_2{}^3 & x_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^4 & x_3{}^3 & x_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4{}^4 & x_4{}^3 & x_4{}^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5{}^4 & x_5{}^3 & x_5{}^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}\right];$$

```
grafica1 = ContourPlot[expresion == 0, {x, -5, 7}, {y, -4, 7},
   ContourStyle → {Red, Thick} , Frame → False, Axes → True, AxesLabel → {"x", "y"} ];

puntos = Graphics[{PointSize[0.02] ,  Point[Table[{xk, yk} , {k, 1, 5}]] } ] ;
expresion == 0
Show[grafica1, puntos]
```

Out[5]= $-799\,200 - 715\,680\,x + 270\,120\,x^2 + 90\,720\,x^3 - 23\,880\,x^4 + 201\,600\,y == 0$

Out[6]=

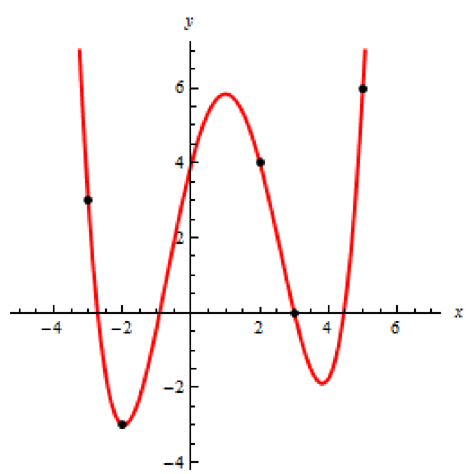

Figura 1. Polinomio de cuarto grado dados 5 puntos.

Movimiento uniformemente acelerado.

Es bien sabido que cuando una partícula se mueve con aceleración constante, su función de posición es siempre cuadrática con respecto al tiempo, es decir, puede expresarse como $S(t) = (a/2)t^2 + v_o t + S_o$ producto de resolver la ecuación diferencial $d^2S/dt^2 = a$ sujeta a $S(0) = S_o$ y $S'^{(0)} = v(0) = v_o$ (*Tippens*, *2001*). Reconociendo a $S(t)$ como una función polinomial de grado 2, es posible definirla por medio de 3 puntos, lo que implica conocer otras dos posiciones aparte de la inicial, determinadas en dos diferentes momentos. Es posible llegar a un acercamiento de la ecuación de posición si predecimos de manera aproximada las otras dos posiciones. En este punto, es necesario especificar que la predicción, es una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que produce (*Cantoral et al.*, *2005*). Una vez que haya transcurrido un lapso Δt la nueva posición, aproximadamente es $S_o + v_o\Delta t$; de igual manera, transcurrido otro Δt, se llega a la posición $S_o + v_o\Delta t + (v_o + a\Delta t)\Delta t$. En el ejemplo de la figura 2, se considera una partícula en movimiento, con aceleración constante de $3\,m/s^2$, una velocidad inicial de $2\,m/s$ y una posición inicial de $1\,m$ usando un valor de $\Delta t = 0.5\,s$ y se muestra la solución aproximada obtenida y la comparación con la solución real.

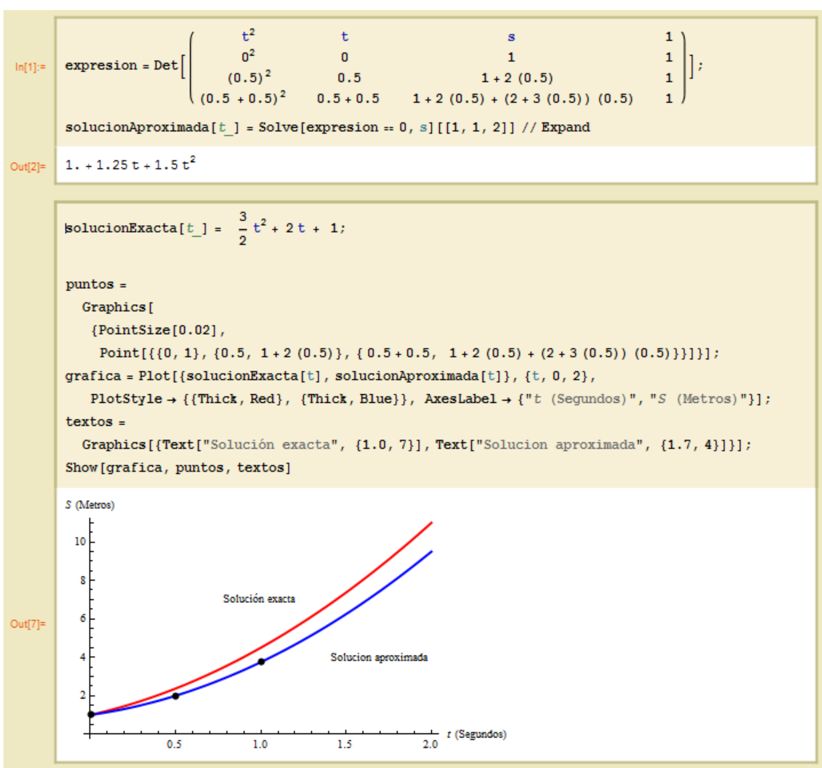

Figura 2. Solución aproximada al problema de movimiento con aceleración constante

En la figura 3, se muestran diferentes expresiones de $S(t)$ para valores cada vez más pequeños de Δt. Hay que destacar que a medida que Δt tiende a cero, la ecuación de posición, se aproxima a la solución exacta.

In[1]:=

$$\text{TableForm}\Big[\text{Table}\Big[\Big\{\text{expresion} = \text{Det}\Big[\begin{pmatrix} t^2 & t & s & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 & 1 \\ (\Delta t)^2 & \Delta t & 1+2\,(\Delta t) & 1 \\ (\Delta t+\Delta t)^2 & \Delta t+\Delta t & 1+2\,(\Delta t)+(2+3\,(\Delta t))\,(\Delta t) & 1 \end{pmatrix}\Big];$$

```
   Δt, solucionAproximada[t_] = Solve[expresion == 0, s][[1, 1, 2]] // Expand },
  {Δt, 0.5, 0.025, -0.025}], TableHeadings → {None, {"Δt", "        S(t)"}}]
```

Out[1]//TableForm=

Δt	S(t)
0.5	$1.+1.25\,t+1.5\,t^2$
0.475	$1.+1.2875\,t+1.5\,t^2$
0.45	$1.+1.325\,t+1.5\,t^2$
0.425	$1.+1.3625\,t+1.5\,t^2$
0.4	$1.+1.4\,t+1.5\,t^2$
0.375	$1.+1.4375\,t+1.5\,t^2$
0.35	$1.+1.475\,t+1.5\,t^2$
0.325	$1.+1.5125\,t+1.5\,t^2$
0.3	$1.+1.55\,t+1.5\,t^2$
0.275	$1.+1.5875\,t+1.5\,t^2$
0.25	$1.+1.625\,t+1.5\,t^2$
0.225	$1.+1.6625\,t+1.5\,t^2$
0.2	$1.+1.7\,t+1.5\,t^2$
0.175	$1.+1.7375\,t+1.5\,t^2$
0.15	$1.+1.775\,t+1.5\,t^2$
0.125	$1.+1.8125\,t+1.5\,t^2$
0.1	$1.+1.85\,t+1.5\,t^2$
0.075	$1.+1.8875\,t+1.5\,t^2$
0.05	$1.+1.925\,t+1.5\,t^2$
0.025	$1.+1.9625\,t+1.5\,t^2$

Figura 3. $S(t)$ para valores cada vez más pequeños de Δt.

Lo anterior nos conduce a reflexionar, que la solución exacta será el producto del límite del acercamiento de las tres diferentes posiciones. En otras palabras, tres puntos infinitamente cercanos determinan el comportamiento futuro del movimiento de la partícula. En la figura 4 se muestra el cálculo del límite de este acercamiento que conduce a la función de posición exacta.

```
In[1]:= a = 3;
v0 = 2;
s0 = 1;
Determinante = Det[( t^2       t      s                               1
                     0^2       0      s0                              1
                     (Δt)^2    Δt     s0 + v0 * Δt                    1
                     (2 Δt)^2  2 Δt   s0 + v0 * Δt + (v0 + a * Δt) * Δt  1 )];

Ecuacion = Limit[(1/Δt)^3 * Expand[Determinante], Δt → 0];
Solve[Ecuacion == 0, s] // Expand

Out[6]= {{s → 1 + 2 t + 3 t^2/2}}
```

Figura 4. Obtención de $S(t)$ por medio del límite del acercamiento de los tres puntos.

Este método no es privativo de un movimiento de aceleración constante. Por ejemplo, si un objeto se mueve con una aceleración lineal $a(t) = a_1 t + a_2$, la ecuación diferencial que modela la posición es $d^2S/dt^2 = a_1 t + a_2$. Para esta situación, se puede prever que $S(t)$ será una expresión polinomial cúbica en t. Para aproximar a $S(t)$ se requiere predecir de manera aproximada, tres diferentes posiciones, además de la inicial correspondientes a tres diferentes momentos, lo que implica un determinante de 5×5 en cuyo primer renglón estarán los elementos $t^3, t^2, t, s, 1$.

Aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden sin solución analítica.

No existe un método general que nos dé una forma explícita para encontrar la solución de una ecuación diferencial. En la práctica, nos encontramos con ecuaciones específicas para las que nos se conoce un método de resolución o para las cuales las formas explícitas de solución no son las adecuadas para los cálculos. Por estas razones, son tan importantes métodos sistemáticos y eficaces que nos lleven a una aproximación numérica de las soluciones (*Rainville et al., 1998*). Para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales de primero orden, usaremos como base el Método de Euler que esencialmente encuentra puntos que aproximan la solución. Básicamente, para aproximar la solución de una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x,y)$, se hace necesario el uso de las siguientes ecuaciones recursivas (*Campbell y Haberman, 1998*):

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

Hay que resaltar, que el Método de Euler, arroja como resultado, una serie de puntos, los cuales utilizaremos para construir un polinomio.

Supongamos que queremos aproximar la solución de $dy/dx = (e^\wedge(-x^2/10)) \cdot (\operatorname{sen} y)$ en el intervalo $[0,2]$, sujeta a la condición inicial $y(0) = 2$, por medio de una función polinomial de grado 4; esto implica, que sean necesarios 5 puntos distribuidos en el intervalo en cuestión. En la figura 5, se muestran los cálculos pertinentes, así como la comparación de las gráficas del polinomio resultante y la obtenida por medio del comando interconstruido de *Mathematica* para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales *NDSolve*.

In[45]:=

$$f[x\_, y\_] = e^{\frac{-x^2}{10}} \operatorname{Sin}[y];$$

```
x0 = 0; y0 = 2;
xf = 2;
gradoPolinomio = 4;
Δx = (xf - x0)/gradoPolinomio;
Do[x(i+1) = xi + Δx, {i, 0, 3}];
Do[y(i+1) = yi + f[xi, yi] Δx , {i, 0, 3}];
```

$$\text{Aprox} = \operatorname{Det}\left[\begin{pmatrix} x^4 & x^3 & x^2 & x & y & 1 \\ x_0{}^4 & x_0{}^3 & x_0{}^2 & x_0 & y_0 & 1 \\ x_1{}^4 & x_1{}^3 & x_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^4 & x_2{}^3 & x_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^4 & x_3{}^3 & x_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4{}^4 & x_4{}^3 & x_4{}^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix}\right];$$

```
sol = Expand[Solve[Aprox == 0, y]] // N;
p[x_] = sol[[1, 1, 2]]
g2 = Plot[p[x], {x, 0, 2}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotStyle → {Blue, Thick}, AxesLabel -> {"x", "y"}];
puntos = Graphics[{PointSize[.015], Point[Table[{xi, yi}, {i, 0, 4}]]}];
textos = Graphics[{Text["Solución exacta", {1.3, 2.5}], Text["Solucion aproximada", {0.5, 2.75}]}];
Show[g1, g2, puntos, textos, PlotRange → All, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

Out[54]=

$$2. + 1.02858\, x - 0.193723\, x^2 - 0.108396\, x^3 + 0.0374508\, x^4$$

Out[58]=

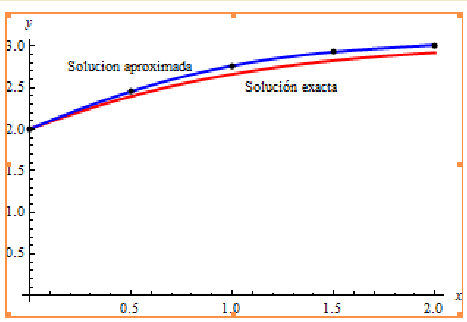

Figura 5. Aproximación de la solución de la ecuación diferencial por medio de un polinomio de grado 4.

Otra forma de aproximar la solución puede ser la siguiente: Dividir el intervalo en cierto número de partes, y en cada una de ellas, definir un polinomio cúbico (o de cualquier otro grado), de tal manera que la aproximación es la concatenación de estos polinomios. Lo que implica que en el caso de polinomios de grado 3, cada subintervalo deberá contener 4 puntos que definan al polinomio. En la figura 6, se muestra la solución aproximada de la ecuación diferencial trabajada anteriormente, consistente de la unión de dos polinomios cúbicos.

```
In[1]:= m[x_, y_] = E^(-x^2 / 10) Sin[y];
x_inicial = 0; y_inicial = 2.0;
x_final = 2;
polinomios = 2;     Δx = (x_final - x_inicial) / (3 polinomios);
x_0 = x_inicial;   y_0 = y_inicial;
Table [{Do[x_i = x_(i-1) + Δx, {i, 1, 3}],
   Do[y_i = y_(i-1) + m[x_(i-1), y_(i-1)] Δx , {i, 1, 3}],
   dete = Det[( x^3    x^2    x    y    1
                x_0^3  x_0^2  x_0  y_0  1
                x_1^3  x_1^2  x_1  y_1  1
                x_2^3  x_2^2  x_2  y_2  1
                x_3^3  x_3^2  x_3  y_3  1 )],
   pol_k[x_] = Solve[dete == 0, y][[1, 1, 2]] // Expand,
   x_0 = x_inicial + 3 k Δx,
   y_0 = pol_k[x_0]}  , {k, 1, polinomios} ];
todos = Table[Plot[pol_k[x], {x, x_inicial + 3 (k - 1) Δx, x_inicial + 3 k Δx }, PlotStyle → {Red, Thick}],
   {k, 1, polinomios}];
g1 = Show[todos, PlotRange → All];
exacta[x_] = NDSolve[{y'[x] == m[x, y[x]], y[x_inicial] == y_inicial}, y[x], {x, x_inicial, x_final}][[1, 1, 2]];
g2 = Plot[exacta[x], {x, x_inicial, x_final}, PlotStyle → {Black, Thick}, PlotRange → All];
Show[g1, g2, PlotRange → All, AxesLabel → {"x", "y"}, AxesOrigin → {0, 0}]
```

Out[11]=

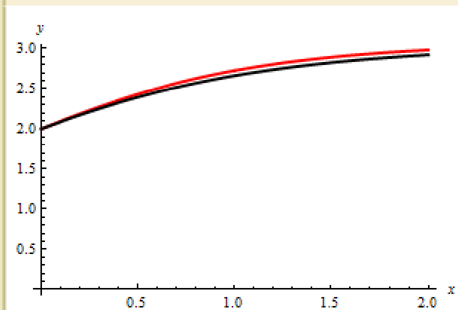

Figura 6. Aproximación por medio de dos polinomios cúbicos.

Entre mayor sea el número de polinomios cúbicos concatenados en el intervalo aproximando a la solución, mejor es ésta, tal como puede observarse en la figura 7.

Aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales por medio de polinomios y la convergencia de puntos.

Los dos métodos anteriores para aproximar la solución de las ecuaciones diferenciales, están basadas en los puntos que arroja el Método de Euler, separados por distancias finitas. La idea sigue siendo realizar la aproximación por medio de una serie de polinomios consecutivos, sin embargo, la definición de cada uno de ellos, será por medio de puntos infinitamente cercanos ubicados al principio de cada subdivisión del intervalo, con la finalidad de mejorar el Método de Euler por medio de hacer compartir cierto número de derivadas del polinomio con la solución (*López et al., 2011*). Consideremos la ecuación diferencial $dy/dx = x - 2y$ definida en el intervalo

[0,2] sujeta a la condición inicial $y(0) = 10$. Supongamos que se desea aproximar la solución de ésta por medio de 4 polinomios cúbicos, de tal manera que cada subintervalo mide 0.5. El primer polinomio $q_1(x)$ empezará en el punto correspondiente a la condición inicial y terminará en $(0.5, q_1(0.5))$, construido por medio de 4 puntos de Euler infinitamente cercanos partiendo de la condición inicial. El segundo polinomio $q_2(x)$ se construye igual que el primero, es decir, por medio de la convergencia de 4 puntos partiendo de donde finalizó $q_1(x)$ y termina en $(1, q_1(1))$ y así sucesivamente. La figura 8, muestra un programa en el cual se resuelve la situación descrita.

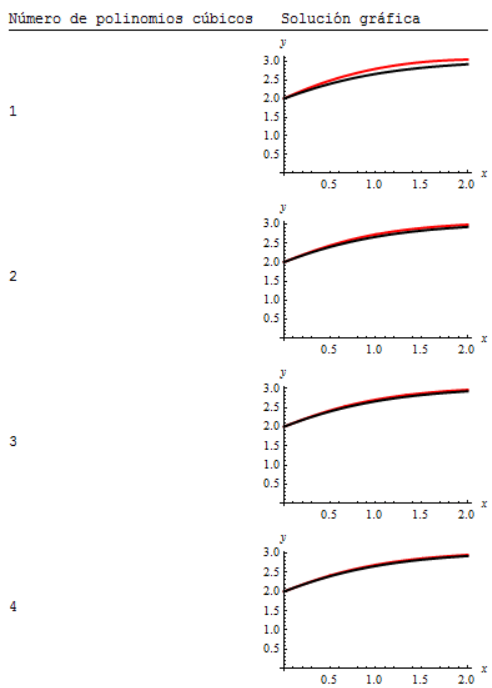

Figura 7. Aproximación usando cada vez más polinomios.

```
In[1]:= m[x_, y_] = x - 2 y;
x_inicial = 0; y_inicial = 10;
x_final = 2;      polinomios = 4;
x_0 = x_inicial;   y_0 = y_inicial;
longitudEnX = (x_final - x_inicial) / polinomios;
Table[{Do[x_i = x_(i-1) + Δx, {i, 1, 3}],
   Do[y_i = y_(i-1) + m[x_(i-1), y_(i-1)] Δx , {i, 1, 3}],
   aproximada = Det[( x^3    x^2    x    y    1
                      x_0^3  x_0^2  x_0  y_0  1
                      x_1^3  x_1^2  x_1  y_1  1
                      x_2^3  x_2^2  x_2  y_2  1
                      x_3^3  x_3^2  x_3  y_3  1 )],     limite = Limit[(1/Δx)^6 aproximada, Δx → 0],
   sol = Expand[Solve[limite == 0, y]],
   q_z[x_] = sol[[1, 1, 2]],
   x_0 = x_inicial + z longitudEnX,    y_0 = q_z[x_0]}, {z, 1, polinomios}];
todos = Table[ Plot[q_w[x], {x, x_inicial + (w - 1) longitudEnX, x_inicial + w longitudEnX},
    PlotStyle → {Red, Thick}], {w, 1, polinomios}];
graficaAproximada = Show[todos, PlotRange → All];
exacta[x_] = NDSolve[{y'[x] == m[x, y[x]], y[x_inicial] == y_inicial}, y[x], {x, x_inicial, x_final}][[1, 1, 2]];
graficaExacta = Plot[exacta[x], {x, x_inicial, x_final}, PlotStyle → {Thick, Blue}, AxesLabel → {"x", "y"}];
Show[graficaAproximada, graficaExacta, AxesLabel → {"x", "y"}]
```

Out[11]=

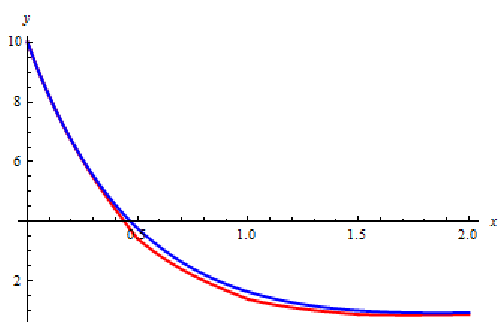

Figura 8. Aproximación por medio de la unión de 4 polinomios cúbicos.

Cabe mencionar que entre mayor sea el número de polinomios usados, mejor es la aproximación, pero que converge a ésta de una manera mucho más rápida que los métodos descritos anteriormente.

Conclusiones.

Los métodos descritos en este artículo revisten una utilidad más didáctica que práctica, ya que no se persigue mejorar los métodos numéricos existentes para aproximar las soluciones de las ecuaciones diferenciales, sino mejorar los niveles de comprensión sobre la naturaleza de las ecuaciones, sus soluciones, los límites y la convergencia.

En muchos de los problemas no escolares, se hace indispensable, el uso de estrategias numéricas para aproximar la solución que posean un cierto grado sistematización. Dicha habilidad no se enfatiza en los ambientes escolares. El desarrollo mostrado en este artículo muestra una sistematicidad en los procesos de aproximación útil en el campo didáctico.

Referencias.

Ávila, M. y López, C. 2009. *La osculación como un medio para arribar a las series de Taylor y Mc. Laurin apoyado con el uso de la tecnología*. En García G. e Ibarra S (Eds.) Memorias de la XIX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Mosaicos Matemáticos. N^{o}. 32. Universidad de Sonora. Hermosillo Sonora México. pp. 39-44.

Campbell, S. y Haberman, R. 1998. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera*. Editorial Mc. Graw Hill. México.

Cantoral, R. Molina, J. Sánchez, M. 2005. *Socioepistemología de la predicción*. En Lezama J. Sánchez M. Molina J. (Eds.) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México CLAME. 18: 463-468.

López, C. Ávila, M. Luna, J. Mederos, B. 2011. *Polinomios a la Medida: Un Ejemplo de la Matemática que se Puede Construir por Medio de la Exploración y el Uso de la Tecnología*. Memorias de la XXI Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. pp. 205-211.

Moreno, M. y Azcárate, C. 2003. *Concepciones y Creencias de los Profesores Universitarios de Matemáticas a Cerca de la Enseñanza de las Ecuaciones diferenciales*. Enseñanza de las Ciencias. 21 (2): 265-280.

Rainville, E. Bedient, P. Bedient, R. 1998. *Ecuaciones Diferenciales*. 8va edición. Editorial Prentice Hall. México.

Tippens, P. 2001. *Física, Conceptos y Aplicaciones*. 6ta edición. Editorial Mc. Graw, Hill. México.