Juegos y Rarezas Matemáticas

Topología y juegos

Topology and games

Angélica Benito Sualdea y Susana Merchán Rubira

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen IX, Número 1, pp. 163–176, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Nov'18; Aceptación: 15 Feb'19

1 de abril de 2019

Resumen

En este trabajo se presentan unos retos cuya solución está relacionada con la topología. La idea es acercar la geometría a los estudiantes desde una perspectiva diferente a la curricular y la manera de llevar a cabo este objetivo es a través de un área de las matemáticas que no está presente en el aula, como es la topología.

El espectro de público al que están destinado estos juegos, dada su componente manipulativa, es bastante amplio. Se han llevado a cabo con audiencias de distinta procedencia y nivel académico; desde alumnos de primaria, de secundaria y universitarios, hasta participantes de diversas ferias de ciencia. La manera de proponer la solución de cada reto ha sido desde un punto de vista intuitivo y "para todos los públicos".

Palabras Clave: Topología, Juegos Matemáticos, cinta de Möbius, botella de Klein, gamificación, pegado de superficies.

Abstract

In this paper we present several challenges whose solutions are closely related to topology. The main idea of this work is to bring the geometry from a different perspective to the traditional one. The way to achieve this goal is through a discipline of the mathematics which, normally, is not in the classroom: the topology.

These challenges have been made for a very wide audience. Indeed, the games have been carried out in front of public with different range of age and academic level; from primary to secondary school to university students. The solution we propose for each game is intuitive and for all audiences.

Keywords: Topology, Mathematical games, Möbius strip, Klein's bottle, gamification, gluing surfaces.

1. Introducción: Topología y construcción de superficies

1.1. Topología: un mundo de plastilina

La *topología* es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalterados por cierto tipo de cambios continuos (llamados transformaciones continuas), independientemente de su tamaño o apariencia.

De una manera intuitiva y no demasiado rigurosa, en la geometría clásica (geometría euclídea), dos cuerpos geométricos son "*el mismo*" si pueden transformarse uno en el otro a través de isometrías, esto es respetando las medidas de ángulo, área y volumen. En topología, el concepto de "igualdad" entre dos cuerpos es mucho más laxo: es posible *retorcer, doblar, estirar, encoger* las figuras como si fueran de "plastilina", pero no está permitido romperlas ni pegarlas.

De esta forma, una esfera sería topológicamente lo mismo que un cubo o un cilindro.

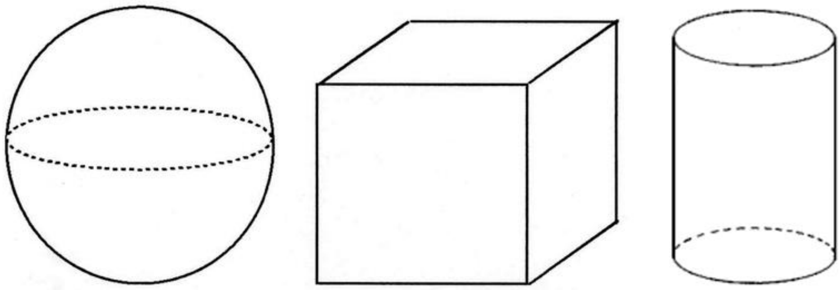

Figura 1. La esfera, el cubo y el cilindro.

Simplificando mucho, podría decirse que dos figuras son topológicamente equivalentes si se puede transformar la una en la otra estirando o encogiéndolas pero respetando los agujeros de su geometría.

Otro ejemplo famoso de dos cuerpos geométricos topológicamente equivalentes es el de la taza y donuts (toro). Ambos tienen un solo agujero y podemos pasar de una figura a otra estirándolas o encogiéndolas, respetando los agujeros y sin cortar ni pegar.

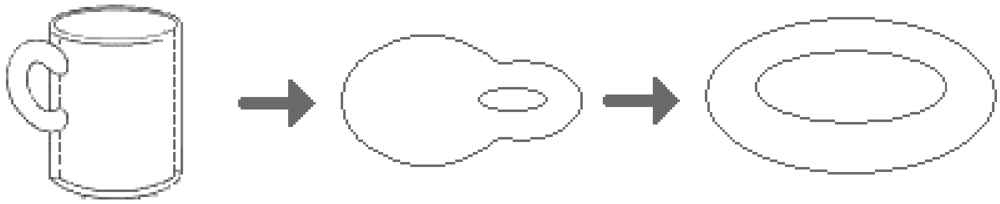

Figura 2.Transformación de una taza en un toro
Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Homeo_tasse.png

De manera formal, se puede decir que el *número de agujeros* de un cuerpo geométrico es un invariante desde la perspectiva de la topología. En los juegos propuestos en la sección 3, es de especial importancia tener en cuenta este hecho de cara a encontrar la solución.

1.2. Construcción de nuevas superficies

El plano es una de las superficies más comunes, familiares y sencillas de representar. A partir del plano, usando las herramientas básicas de la topología (estirar, doblar, torcer…) y añadiendo el concepto de *pegar*, se pueden crear nuevas e interesantes superficies. A continuación, veremos cómo construir un cilindro, una cinta de Möbius, el toro y la botella de Klein. Estas superficies serán utilizadas en los retos propuestos en la sección 4.

Para la construcción de las superficies, partimos de un plano que representamos con un cuadrado o un rectángulo.

1.2.1. Construcción del cilindro

Como indicamos en la Figura 3, partimos de un plano y lo doblamos acercando la parte superior a la inferior. A continuación, se pegan los dos lados formando el cilindro.

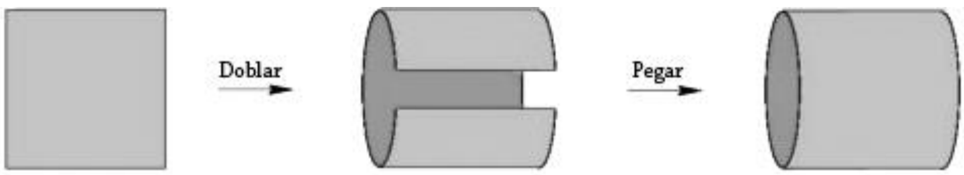

Figura 3. Del plano al cilindro.

Gráficamente, se representa el cilindro en el plano de partida indicando las líneas de pegado:

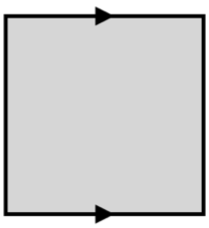

Figura 4. Líneas de pegado del cilindro.

1.2.2. Construcción del toro

El toro se puede construir a partir del cilindro, doblándolo y pegando sus bases, como se muestra en la Figura 5.

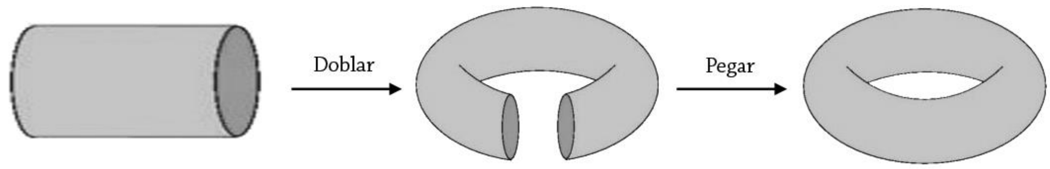

Figura 5. Construcción del toro.

Gráficamente, al igual que antes, el toro se puede representar como un cuadrado con sus líneas de pegado:

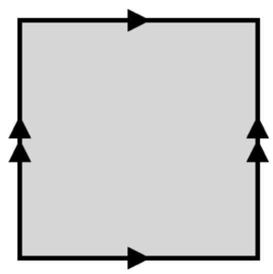

Figura 6. Líneas de pegado del toro.

1.2.3. Construcción de la cinta de Möbius

Para construir la cinta de Möbius, partimos de un rectángulo (se podría partir de un cuadrado y estirarlo hasta obtener el rectángulo), lo retorcemos dando media vuelta y pegamos los extremos como se muestra en la Figura 7.

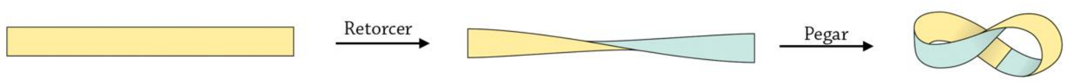

Figura 7. Construcción de la banda de Möbius.

En este caso, podemos representar la cinta de Möbius con sus líneas de pegado de la siguiente manera:

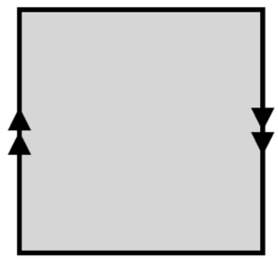

Figura 8. Líneas de pegado de la cinta de Möbius.

1.2.4. Construcción de la botella de Klein

La botella de Klein se construye de una manera similar al toro, pero en lugar de partir de un cilindro, se parte de la cinta de Möbius. Alternativamente, se puede construir a partir del cilindro, pero yéndonos a una cuarta dimensión para poder pegar los extremos del cilindro por dentro sin atravesar la superficie.

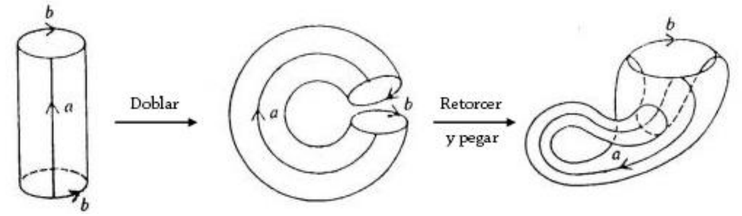

Figura 9. Construcción de la botella de Klein.

Gráficamente, la siguiente Figura representa la botella de Klein a partir de sus líneas de pegado:

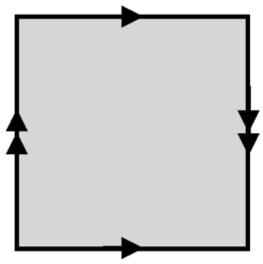

Figura 10. Líneas de pegado de la botella de Klein.

2. Retos topológicos y la invarianza del número de agujeros

2.1. El juego de las cuerdas

Situación inicial-planteamiento del problema: Dos personas tienen una cuerda atada a sus muñecas y entrelazadas entre sí, como se puede observar en la figura:

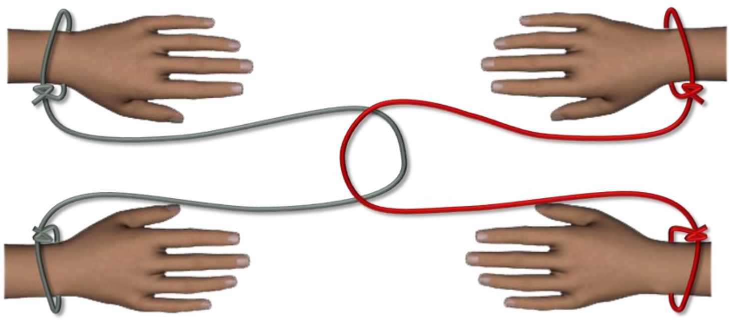

Figura 11. Situación inicial en el reto de las cuerdas.

¿Pueden las dos personas liberarse sin desatar las cuerdas de sus muñecas?

Perspectiva matemática del problema:

- El problema no es topológicamente equivalente a dos aros entrelazados (Figura 12) porque hay cuatro agujeros en las muñecas (Figura 13). De hecho, con un solo agujero (Figura 14) es suficiente para llegar a la solución.

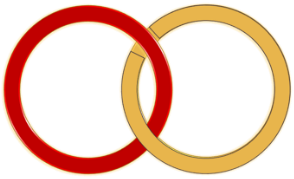

Figura 12

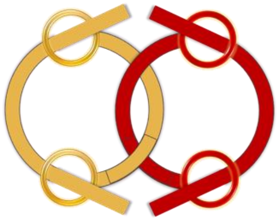

Figura 13

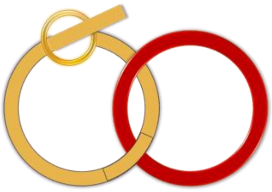

Figura 14

Solución:

- Si se pudiera liberar la muñeca de la cuerda, bastaría con quitarla, tirar y las dos cuerdas quedarían libres. Sin embargo, hay que jugar con el agujero.
- Estirando el agujero (haciéndolo todo lo grande que deseemos), podemos pasar la cuerda 1 (cuerda roja), sin pérdida de generalidad, por encima de la cuerda 2 y a través del agujero es posible salvar la mano y tirar, de manera que quedan liberadas las dos cuerdas.

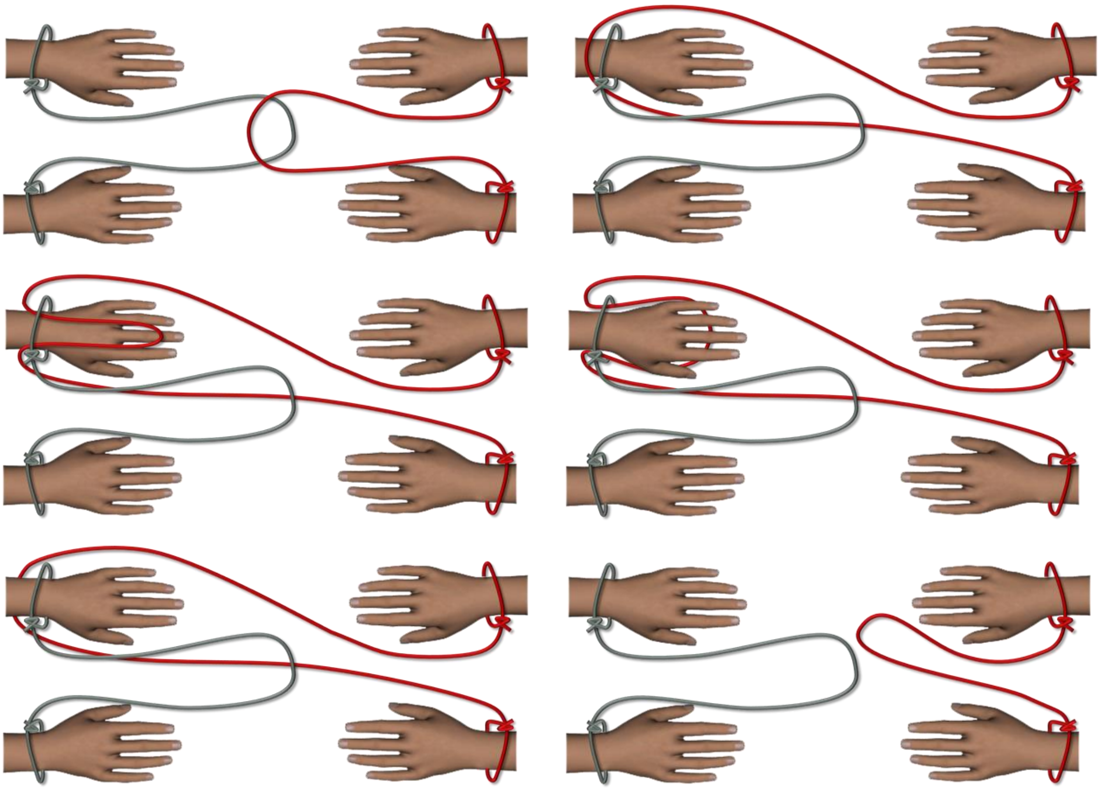

Figura 15. Solución del reto de las cuerdas.

Un hecho observado en la puesta en práctica de esta actividad es que, en general, las personas que se enfrentan a este problema no tienen en cuenta los agujeros de las muñecas, por lo que su problema se traduce al de la Figura 12, que es imposible de resolver.

2.2. El juego de los tres aros

Situación inicial-planteamiento del problema: Disponemos de tres aros que tienen la posibilidad de abrirse. El problema es cómo unir los tres aros de manera que cortando (abriendo) cualquiera de ellos se liberen los tres.

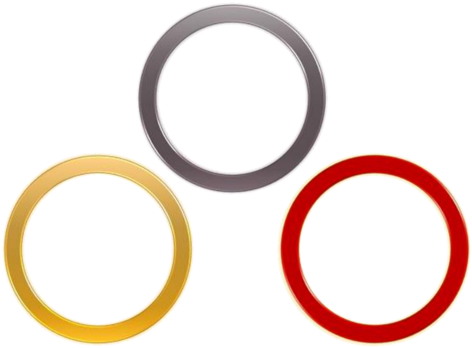

Figura 16. Situación inicial en el reto de los aros.

Solución: Desarrollaremos la construcción de la solución de este problema a partir de los errores comunes que se suelen cometer y la manera de salvarlos.

- El primer intento es unir dos de los aros entrecruzándolos. Sin embargo, como se tienen que liberar los tres al cortar cualquiera de ellos, la posición del tercero daría igual, ya que al abrirlo los dos primeros seguirían unidos.

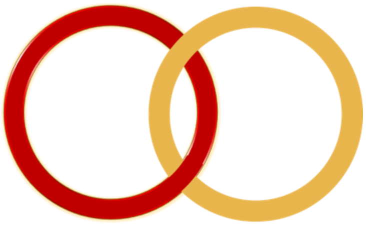

Figura 17. Primer intento en el reto de los aros.

Esto nos lleva a que la posición de los dos primeros aros tiene que ser de uno encima del otro.

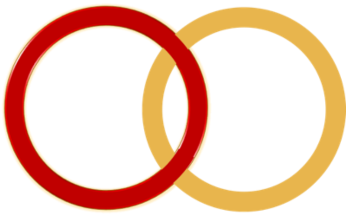

Figura 18. Segundo intento en el reto de los aros.

El siguiente error común, llegados a este punto, es enganchar el tercer aro en uno de ellos o en la intersección de ambos. Una posibilidad se muestra en la siguiente figura:

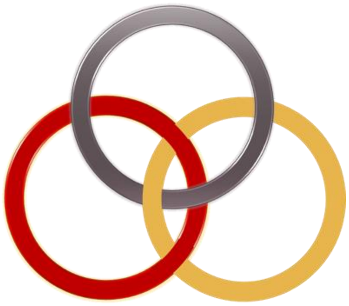

Figura 19. Error común en el reto de los aros.

En este caso, es cierto que, abriendo el gris o el amarillo, los tres aros se separan. Sin embargo, abriendo el rojo, los aros amarillo y gris quedan unidos, por lo que no sería una solución válida.

Partiendo de nuevo de la Figura 18, se puede observar que la solución es colocar el tercer aro de manera que la posición relativa de éste y cada uno de los otros dos sea siempre la misma. Esto es, en la figura siguiente, el aro gris siempre está por debajo del amarillo y por encima del rojo.

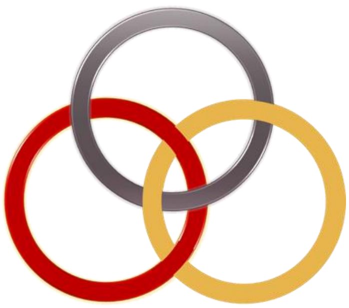

Figura 20. Solución del reto de los aros.

2.3. El juego de la camiseta

Situación inicial-planteamiento del problema: Una persona vestida con una camiseta de manga corta (topológicamente equivalente a una camiseta de manga larga, pero no funcionalmente) entrelaza sus manos. El objetivo es quitarle la camiseta, darle la vuelta y ponérsela de nuevo al revés, ¿es posible?

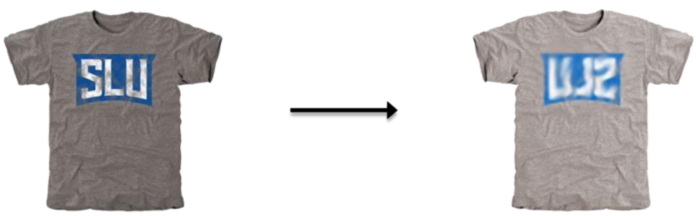

Figura 21. Reto de la camiseta.

Solución: Topológicamente, la persona con las manos unidas que lleva la camiseta es equivalente a un cilindro, por lo tanto, la camiseta no podrá salir de él. Será la camiseta el objeto que tendremos que manipular. Se observa que la camiseta tiene más agujeros, lo que nos permitirá sacarla por la cabeza, darle la vuelta y volver a introducirla por la cabeza, sin necesidad de sacarla del "cilindro". Los pasos para la solución serían los siguientes:

1) Sacar la camiseta por la cabeza y dejarla sobre los brazos. Obsérvese que la camiseta está del revés.
2) Pasar toda la camiseta por una de las mangas y estirarla sobre los brazos. Ahora la camiseta, se ha dado la vuelta.
3) Volvemos a poner la camiseta por la cabeza, teniendo ahora la camiseta en la posición deseada.

4. Retos topológicos y el pegado de superficies

El objetivo a lo largo de esta sección es presentar las superficies obtenidas en la sección 2.2 de una manera lúdica. Esto permitirá que el alumno se familiarice con el pegado de superficies y con las propiedades topológicas de cada una de estas superficies de una manera profunda, aunque sencilla. Nos basaremos en el juego de las tres en raya, aunque estas mismas actividades se pueden diseñar para el ajedrez (juego más atractivo para un cierto público).

Situación inicial-planteamiento del problema: La siguiente figura representa el tablero (en el plano) de las tres en raya, un juego al que hemos jugado todos.

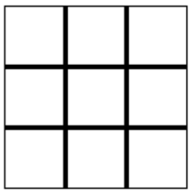

Figura 22. Las tres en raya en el plano.

Este juego es bastante interesante porque nos permite hacernos algunas preguntas como: ¿cuántas formas de empezar distintas tiene el primer jugador? ¿cuántas respuestas tiene el segundo? ¿existe alguna estrategia ganadora? La respuesta a la primera pregunta es que, sin contar rotaciones y simetrías, hay únicamente tres posibilidades y lo normal es que la primera jugada sea elegir la casilla central. En este caso, el oponente tiene únicamente dos posibles respuestas (colocar su ficha en una de las cuatro esquinas o en uno de los cuatro lados). En las tres en raya no hay una estrategia ganadora, salvo que el segundo jugador no sepa que hay una estrategia "perdedora" (si inicia el juego poniendo en uno de los lados):

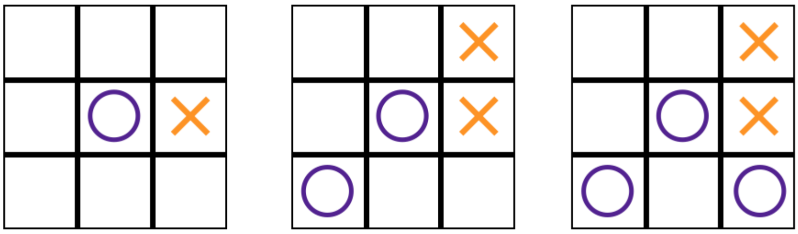

Figura 23. Estrategia ganadora cuando el segundo jugador (cruces) pone en un lado.

Pero el mundo plano es un poco aburrido, ¿por qué no doblar el papel y pegarlo por uno de los bordes para formar un cilindro?

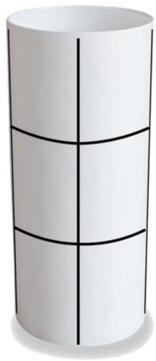

Figura 24. Papel doblado formando un cilindro con el tablero de las tres en raya.

La pregunta natural ahora en nuestro "mundo cilíndrico" es ¿cuántos inicios distintos tenemos? ¿Cuántas posiciones centrales hay? Si nos fijamos, sólo hay dos tipos de figuras para el primer jugador: los centros (3) y las laterales (6).

Más interesante es seguir curvando nuestro mundo y acabar jugando a las tres en raya en un toro.

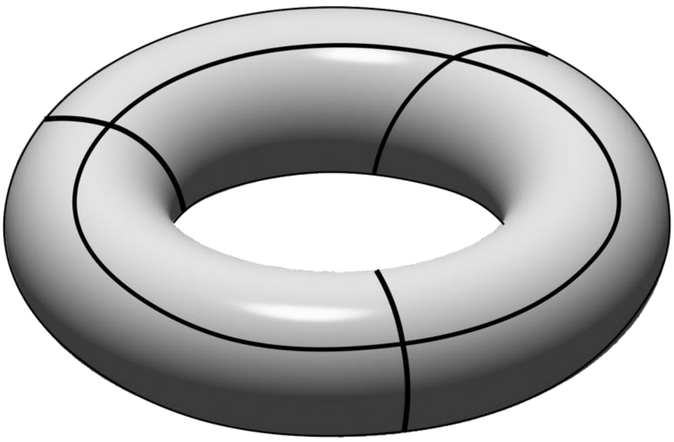

Figura 25. El tablero de las tres en raya en un toro.

Podemos plantear las mismas preguntas que en el tablero inicial de tres en raya, aunque es más difícil de visualizar lo que sucede. Para ello, podemos hacer uso de la construcción del toro a partir de sus líneas de pegado mencionado en 1.2.2.

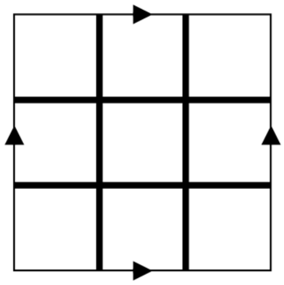

Figura 26. El tablero de las tres en raya con las líneas de pegado del toro.

Con esta cuadrícula podemos ver que hay posibilidades de tres en raya diferentes de las clásicas, pero para su mejor visualización es conveniente añadir un retículo con las identificaciones (recordemos que la esquina superior izquierda se pega al lado de la esquina inferior izquierda y junto a la esquina superior derecha, entre otras posibilidades). En la siguiente figura mostramos, con colores, las correspondencias existentes:

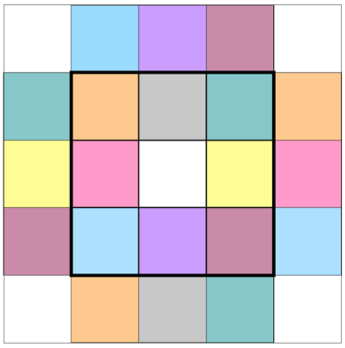

Figura 27. Identificaciones en el tablero de tres en raya en el toro.

Así, las siguientes posiciones serían equivalentes en el tablero de tres en raya en el toro:

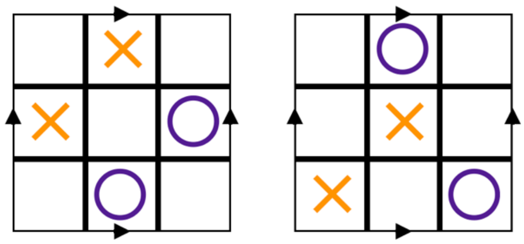

Figura 28. Posiciones equivalentes en el toro.

Una vez vistas estas equivalencias, cabe preguntarnos: ¿cuántos movimientos iniciales tiene el primer jugador? ¿Cuántas posibles respuestas tiene el segundo jugador? ¿Existe una estrategia ganadora?

El primer jugador sólo tiene una posible posición inicial, ya que todas las casillas se pueden considerar el centro. El segundo jugador tiene dos posibles respuestas: colocar su ficha en una esquina o en un lateral (disponiendo la ficha del primer jugador en el centro usando las identificaciones). En el toro sí que existe una estrategia ganadora para el primer jugador, es decir, el primer jugador siempre ganará si conoce la estrategia y el segundo siempre perderá con independencia de sus movimientos. En la siguiente figura mostramos la estrategia ganadora cuando el segundo jugador coloca en una esquina (si coloca en un lateral, seguiremos la estrategia ganadora del plano, véase la Figura 23).

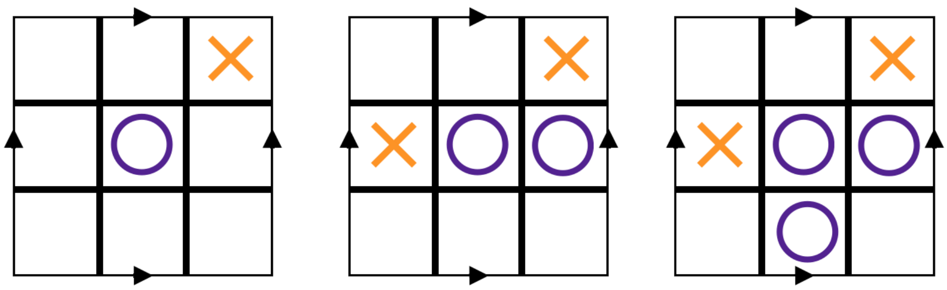

Figura 29. Estrategia ganadora en el toro cuando el segundo jugador (cruces) pone en una esquina.

Es posible plantear este mismo juego en la botella de Klein dejando un tiempo previo para que el público se familiarice con las distintas identificaciones de la botella.

Se puede profundizar aún más planteando el juego de ajedrez en el toro y en la botella de Klein, la primera pregunta que surge es: ¿podemos usar las mismas posiciones iniciales del ajedrez clásico? La respuesta es que no debido a que el rey negro iniciaría la partida en jaque mate. Las posibilidades de juegos consisten en encontrar una posición inicial lo suficientemente justa o proponer una y dejar que los alumnos jueguen y se familiaricen con los nuevos movimientos que aparecen. Como último comentario o detalle curioso, es interesante puntualizar que, al contrario de lo que sucede en el ajedrez clásico o en el ajedrez en el toro, en el ajedrez en la botella de Klein un alfil se mueve por casillas de diferente color: ¡saliéndose por una esquina puede cambiar de negro a blanco o blanco a negro!

Referencias

[1] TANTON, James. *Solve This: Math Activities for Students and Clubs*, Mathematical Association of America, United States of America, 2001.

[2] WEEKS, Jeffrey R. *The shape of space*, (Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics), CRC Press, 2nd Edition, New York, 2001.

[3] Topología. (2018, 20 de febrero). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Fecha de consulta: 20 abril 2018 desde https://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa.

Sobre las autoras:

Nombre: Angélica Benito Sualdea
Correo Electrónico: angelica.benito@uam.es
Institución: Universidad Autónoma de Madrid, España.

Nombre: Susana Merchán Rubira
Correo Electrónico: susana.merchan@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.