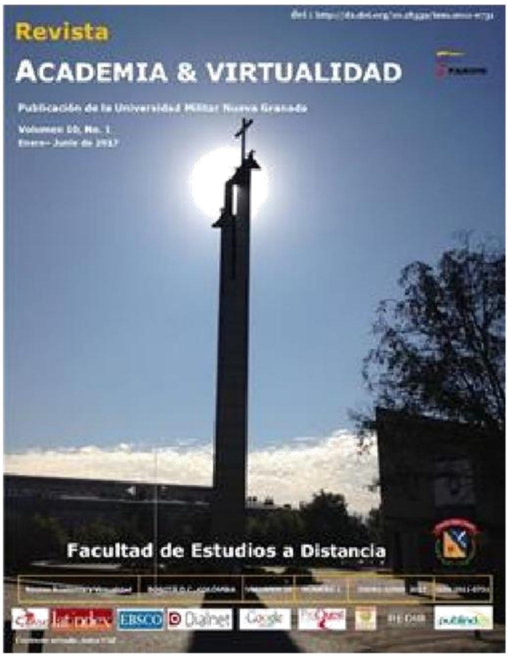

Revista ACADEMIA Y VIRTUALIDAD
Facultad Estudios a Distancia
Universidad Militar Nueva Granada

Este PDF corresponde a una pre-impresión de un artículo aceptado para publicación en la revista *Academia y Virtualidad*.

Este artículo es compartido con la finalidad de hacer disponibles estos aportes a los lectores de la revista.

Tenga en cuenta que la versión final del artículo puede parecer diferente y puede tener algunas diferencias mínimas en el contenido.

Algunas tareas para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada [1]

Wilson Gordillo[2], Luis R. Pino-Fan[3], Vicenç Font[4] y Juan Carlos Ponce-Campuzano[5]

Recibido, Agosto 13 de 2017
Concepto evaluación, Septiembre 16 de 2017
Aceptado, Septiembre 16 de 2017

Referencia: Gordillo, W.; Pino-Fan, L., Vicenç, F. y Ponce Campuzano, J.C (2018). "Algunas tareas para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada". *Revista Academia y Virtualidad*, 11, (2), p-p

Resumen

En el presente artículo se presentan varias tareas que han sido diseñado para evaluar la comprensión que tienen estudiantes de cursos de cálculo sobre el objeto matemático antiderivada. Las tareas se han diseñado tomando en cuenta las sugerencias y recomendaciones del amplio bagaje de investigaciones sobre didáctica del cálculo con las que se cuenta a nivel internacional. Así mismo, se detalla el análisis ontosemiótico de cada una de las tareas propuestas, lo cual da evidencia de la red de objetos y procesos matemáticos –y sus vínculos– puestos en juego en las actividades de comprensión de la antiderivada. El resultado de este estudio muestra que las tareas aquí descritas pueden ser aplicadas a estudiantes

---

[1] Artículo de investigación científica y tecnológica

2 Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Los Lagos, Chile. Profesor Asociado de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Dirección postal: Carrera 7 No. 40-53, Bogotá, Colombia. E-mail: wgordillot@udistrital.edu.co

3 Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Profesor Asociado de la Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile. Dirección postal: Av. Fuchslocher 1305, Osorno, Chile. E-mail: luis.pino@ulagos.cl

4 Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación por la Universidad de Barcelona, España. Profesor Titular de la Universidad de Barcelona, Barcelona, España. Dirección postal: Calle Figols 15, Barcelona, España. E-mail: vfont@ub.edu

5 Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México. Profesor investigador de la Universidad de Queensland, Queensland, Australia. Dirección postal: St Lucia 4072, Queensland, Australia. E-mail: j.ponce@uq.edu.au

universitarios (o estudiantes de cursos de cálculo que hayan estudiado la antiderivada), y podrían ser adaptadas para abordar el estudio de dicho objeto matemático.

Palabras clave: Antiderivada, Comprensión, Cálculo, Diseño de Tareas, Análisis Ontosemiótico.

Some tasks to evaluate the understanding of the mathematical object antiderivative

Abstract

In this article several tasks that have been designed to assess students' understanding of calculus courses on antiderivative mathematical object are presented. The tasks are designed taking into account the suggestions and recommendations of the extensive background research on teaching calculus with which it has internationally. Also, the ontosemiotic analysis of each of the proposed tasks is detailed, which gives evidence of the network of mathematical objects and processes - and their links - put into play in the activities of understanding the antiderivative. The result of this study shows that the tasks described here can be applied to college students (or calculus courses students who have studied the antiderivative), and could be adapted to address the study of the mathematical object.

Keywords: Antiderivative, Understanding, Calculus, Tasks Design, Ontosemiotic Analysis.

Algumas tarefas para avaliar a compreensão do antiderivado de objetos matemáticos

Resumo

Neste artigo, são apresentadas várias tarefas que foram projetadas para avaliar a compreensão dos alunos dos cursos de cálculo sobre o objeto matemático antiderivado. As tarefas são projetadas levando em consideração as sugestões e recomendações da extensa pesquisa de fundo sobre cálculo de ensino com a qual tem internacionalmente. Além disso, a análise ontosemiótica de cada uma das tarefas propostas é detalhada, o que evidencia a rede de objetos e processos matemáticos - e seus links - colocados em prática nas atividades de compreensão da antiderivada. O resultado deste estudo mostra que as tarefas descritas aqui podem ser aplicadas a estudantes universitários (ou alunos de cursos de cálculo que estudaram a antiderivada) e podem ser adaptados para abordar o estudo do objeto matemático

Palavras-chave: Antiderivada, Compreensão, Cálculo, Design de Tarefas, Análise Ontosemiótica

Introducción

El objeto matemático antiderivada, tal como la conocemos hoy en día, está relacionado con otras nociones del cálculo infinitesimal, tales como la derivada y la integral. Dichas nociones han sido objeto de diversas investigaciones en las cuales se han producido resultados relevantes, entre los que podemos destacar: sobre los procesos de aprendizaje (Sfard, 1991; Tall, 1991; Artigue, 1995), estrategias y procesos de enseñanza (Czarnocha, Loch, Prabhu & Vidakovich, 2001; Labraña, 2000; Robles, Del castillo & Font, 2012), y uso de tecnología (Depool, 2004, Robles, Del Castillo & Font, 2012), entre otras. En el caso particular de la antiderivada, se han realizado estudios sobre la reflexión de los estudiantes al abordar reglas de integración (Metaxas, 2007); históricos-epistemológicos (Gordillo & Pino-fan, 2016); y el uso de tecnología (Ponce-Campuzano & Rivera-Figueroa, 2011).

La comprensión de los objetos matemáticos en el cálculo infinitesimal ha sido abordada desde diferentes marcos teóricos de la educación matemática, como el propuesto por Sfard (1991), el cual sugiere que a través de los ciclos mentales de *interiorización*, *condensación y reificación*, se logra la comprensión de un objeto matemático. Gray y Tall (1994), por su parte, proponen tres ciclos para la comprensión, *procedimiento, proceso, preconcepto,* con los cuales se logra la comprensión de objetos matemáticos. Kintsch (1998) utiliza un marco teórico para la comprensión de objetos matemáticos que coincide con elementos y supuestos de la teoría de registros semióticos y en particular con la contracción semiótica (Duval, 2006b). Kintsch propone abordar tareas, como si fueran una fórmula, reconociendo símbolos y decodificando para dar una percepción global y situarla en un modelo adecuado para resolver y lograr comprensión. En este mismo sentido, Perie y Kieran (1994) proponen un proceso no lineal, creciente, estratificado, compuesto por ocho niveles: *Primitive Knowing (PK), Image Making (IM), Image Having (IH), Property Noticing (PN), Formalising (F), Observing (O), Structuring (S) y Inventising (I),* y señalan que una vez alcanzado el último nivel, un estudiante se puede desvincular de la situacion concreta y estará preparado para efectuar lo que ellos denominan *folding back*, donde se creará un nuevo conocimiento o se modifica uno existente.

En este artículo se presentan algunas tareas que han sido diseñadas para evaluar la comprensión de la antiderivada como objeto matemático. La propuesta que se presenta en este documento, para evaluar la comprensión de dicho objeto matemático, toma en cuenta dos aspectos fundamentales que hoy en día parece que se han olvidado en la enseñanza tradicional: *el acercamiento intuitivo* y *la conjetura* –aspectos que hemos fundamentado con evidencia obtenida a partir de un estudio histórico-epistemológico sobre la antiderivada (Gordillo & Pino-Fan, 2016)–. Dichos aspectos, tal como lo sustenta Tall (2009), favorecen la participación activa de un estudiante. De igual forma, y compartiendo las posturas de Doorman y Maannen (2008), permiten dar indicaciones sobre cómo evoluciona una noción y su desarrollo conceptual.

Marco Referencial y metodológico

Comprensión de los objetos matemáticos

Aunque, como hemos visto anteriormente, existen diversas posturas para entender la comprensión, de acuerdo con Font (2001) y Godino, Batanero y Font (2007), hay dos maneras básicas de entenderla: como proceso mental o como competencia. De acuerdo con estos autores, estos dos puntos de vista responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como proceso mental. Los posicionamientos pragmatistas del Enfoque Onto-Semiótico (EOS), en cambio, llevan a entender, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. Es decir, se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

Esta manera pragmática de entender la comprensión, implica concebirla también como *conocimiento* y *aplicación de las normas* que regulan una práctica. Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren. Es necesario aclarar que, dentro del EOS, enfoque teórico al que nos apegamos en este estudio, el término *conocimiento* se utiliza en el sentido de "*constructo epistémico–cognitivo general que incluye comprensión, competencia y disposición*" (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209). La disposición, o capacidad, se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica. La competencia se relaciona con las prácticas matemáticas de los sujetos y a la activación, en dichas prácticas, de la *configuración ontosemiótica cognitiva adecuada,* la cual debería estar idóneamente acoplada a la configuración ontosemiótica epistémica de referencia (Pino-Fan, Godino & Font, 2011) y al contexto en el que se desarrolla la práctica. La comprensión como lo afirma Pino-Fan (2014), tiene que ver con las relaciones –vistas desde las perspectiva de la congruencia matemática– que se deben establecer entre todos los elementos que intervienen en la configuración ontosemiótica cognitiva (o epistémica, en el caso de prácticas institucionales) que activa el sujeto para resolver determinadas situaciones/problemas. En el apartado 2.3 describiremos lo que se entiende por configuración ontosemiótica (epistémica y cognitiva).

Criterios para la selección de las tareas

El diseño de cada una de las tareas busca que el objeto matemático se use de manera competente en diferentes situaciones. En el proceso de construcción de las tareas consideramos dos criterios para la selección de cada una de ellas. El primer criterio considera que los problemas/situaciones deben proporcionar información sobre el grado de ajuste del significado personal de los estudiantes respecto del significado global u holístico del objeto antiderivada (Gordillo & Pino-Fan, 2016). Para lograrlo, se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la antiderivada.

El segundo criterio fue que los ítems seleccionados, siguiendo la postura de investigaciones como las de Font (1999), Pino-Fan (2014) y Crisóstomo (2012), respondan a los diferentes tipos de representaciones para la antiderivada. Así mismo, como parte de este criterio hemos considerado los resultados obtenidos de un estudio histórico-epistemológico con el cual realizamos la reconstrucción del significado holístico de la antiderivada a partir de la caracterización de las prácticas matemáticas, representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se emplearon a lo largo de la historia y que dieron lugar a la emergencia, evolución, formalización y generalización de dicho objeto matemático (Gordillo & Pino-Fan, 2016). En este sentido, las tareas ponen en juego los siguientes tipos de representaciones para la antiderivada (y también para las funciones asociadas a ésta): descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica), tabular, icónico y sinóptico (mapas conceptuales).

De esta forma, y dada la complejidad que tiene el planteamiento de una sola tarea que satisfaga o evalúe ambos criterios al mismo tiempo, las tareas se seleccionaron de manera tal que, a lo largo del instrumento *CNM-Antiderivada*, se complementan para evaluar dichos aspectos. Otro factor relevante para la construcción de los ítems, es la reconstrucción del significado holístico de la antiderivada (Gordillo & Pino-Fan, 2016). De acuerdo con D'Ambrosio (2013), la comprensión de los objetos matemáticos depende de la comprensión de cómo se originan y de sus motivaciones para el desarrollo.

Herramientas metodológicas para el análisis de contenido de las tareas

En este trabajo hemos adoptado los posicionamientos pragmatistas que nos brinda el marco teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font, 2007). En el EOS se ha introducido una tipología de objetos matemáticos primarios: situaciones/problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando *redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas*, lo que en el EOS se conoce con el nombre de *configuraciones*. Estas configuraciones pueden ser de tipo *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas), vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la *configuración* de la Figura 1 (Font & Godino, 2006, p. 69).

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios, responden a la necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, con el fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

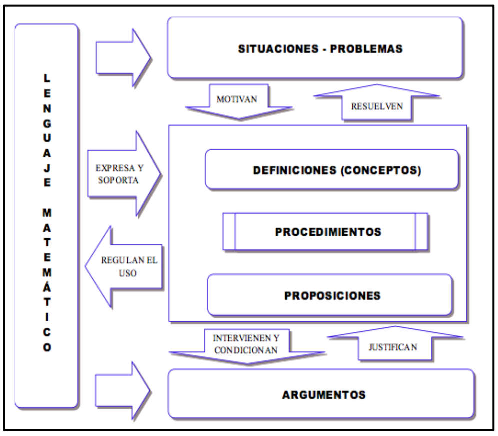

Figura 1. Configuración de objetos matemáticos primarios

Estos objetos matemáticos primarios que conforman la configuración, se manifiestan de diversas maneras durante la actividad matemática: el lenguaje con el cual nos referimos a ellos, que a su vez evocan a conceptos o definiciones, los cuales se vuelven operativos mediante procedimientos y propiedades asociadas, que a su vez se manifiestan durante la solución de las tareas matemáticas. Además, cada uno de los objetos matemáticos primarios puede ser considerado desde distintas facetas o dimensiones duales (Godino, 2002): *personal – institucional*; *ostensivo – no ostensivo; unitario – sistémico; expresión – contenido*; *extensivo – intensivo.* Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011), señalan que tanto estas dualidades como los objetos matemáticos primarios, pueden ser analizados desde una perspectiva proceso–producto, lo que conlleva a considerar los siguientes procesos:

- Institucionalización – Personalización.
- Generalización – Particularización.
- Descomposición/Análisis – Composición/Reificación.
- Materialización – Idealización.
- Representación – Significación.

La emergencia de los objetos matemáticos primarios considerados en el modelo (Figura 1) llevan asociados, respectivamente, los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enunciación y argumentación. La Figura 2, muestra el desglose, y las interacciones, de los objetos matemáticos primarios, las facetas duales desde las que éstos pueden ser vistos, y los procesos que llevan asociados.

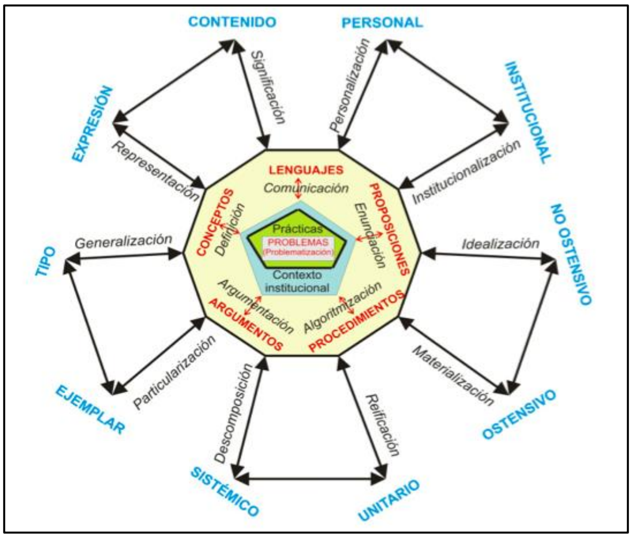

Figura 2. Configuración de objetos y procesos matemáticos

En esta figura se puede observar el papel central que tienen en el EOS las situaciones/problemas y las prácticas realizadas para resolverlas, así como su dependencia de los contextos institucionales en que estas tienen lugar.

Las redes de objetos y procesos que hemos descrito, suelen recibir el nombre de *configuración ontosemiótica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2015), y pueden ser de carácter epistémico o cognitivo, según se refiera a objetos y procesos matemáticos institucionales o personales, respectivamente. En este documento utilizaremos la herramienta *configuración ontosemiótica epistémica* para realizar detalladamente el análisis de los contenidos que se movilizan en las prácticas necesarias para resolver las distintas tareas.

Análisis del contenido que evalúan las tareas

A continuación se muestra el desglose del análisis de contenido de cada una de las tareas; tarea, solución plausible, análisis ontosemiótico, contenido curricular que evalúa la tarea y principales dificultades en la resolución.

Tarea 1: significados verbales de la antiderivada

Esta tarea (Figura 3), es una pregunta clásica que se ha realizado en diversas investigaciones (Badillo, 2003; Hähkiöniemi, 2006; Habre & Abboud, 2006; Bingolbali & Monaghan, 2008; Badillo, Azcárate & Font, 2011; Pino-Fan, Godino & Font, 2013) para explorar los significados de los estudiantes sobre una noción matemática especifica.

Tarea 1. ¿Qué significado o significados tiene para ti la antiderivada?

Figura 3. Tarea 1: significados verbales de la antiderivada

Solución plausible

Al tratarse de una pregunta de carácter global, se espera que los estudiantes proporcionen alguno de los elementos de la lista de los posibles significados de la antiderivada, tales como:

- Es un procedimiento para obtener una familia de funciones, a partir de una función que ha sido derivada.
- Es la primitiva de la función $f(x)$.
- Es la integral indefinida de una función $f(x)$.

Análisis ontosemiótico:

Debido a la generalidad de la tarea (tanto la cuestión como el tipo de solución esperada), no se realiza para ésta el desglose operativo de las configuraciones de objetos y procesos del análisis epistémico. Basta con señalar que tanto los *elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones y argumentos* subyacentes a las posibles soluciones de la tarea son de carácter verbal (Pino-Fan, Godino & Font, 2013). Las descripciones verbales de los estudiantes no requieren conexiones entre los distintos significados de la antiderivada, bastándoles con recordar los usos y significados que han dado a dicho objeto a lo largo de su formación académica, para proporcionar su respuesta.

Contenido curricular que se evalúa:

La tarea 1, evalúa las diversas acepciones de la antiderivada, personales e institucionales.

Principales dificultades para su resolución:

Es posible que la mayoría de los estudiantes respondan de forma errada "proceso inverso de la derivada", sin recordar (o tener conocimiento) de que la finalidad del proceso conlleva a encontrar una familia de funciones a partir de una función que se ha derivado.

Tarea 2: modelo sinóptico estructurado

Esta tarea (Figura 4), se diseñó con el fin de determinar si los estudiantes organizan redes alrededor del objeto bajo estudio, en nuestro caso la antiderivada. Esta organización de redes jerárquica de conceptos o mapas conceptuales, son instrumentos de organización y de representación de conocimientos. Estos mapas conceptuales pueden ser interpretados como modelos sinópticos de descripción estructurada de un sistema (Bencomo, Godino & Wilhelmi, 2004), que suelen ser representados mediante grafos, en cuyos vértices se colocan objetos. De esta manera, para la búsqueda de una respuesta a una cuestión, se organiza y representa el conocimiento mediante redes de objetos.

Tarea 2. Piensa en las siguientes expresiones: **integral indefinida,** $\frac{dy}{dx}$**, velocidad, derivada, integral, área entre dos curvas,** $f'(x)$**, antiderivada,** $\int_a^b f(x)dx$**, integral definida, teorema fundamental del cálculo**. Elabora un mapa conceptual utilizando las expresiones anteriores y otras que tengas en la mente, y explica posibles relaciones entre ellas.

Figura 4. Tarea 2: modelo sinóptico estructurado

Solución plausible

La Figura 5, corresponde a una de muchas organizaciones de algunos términos del cálculo infinitesimal que pueden dar los estudiantes.

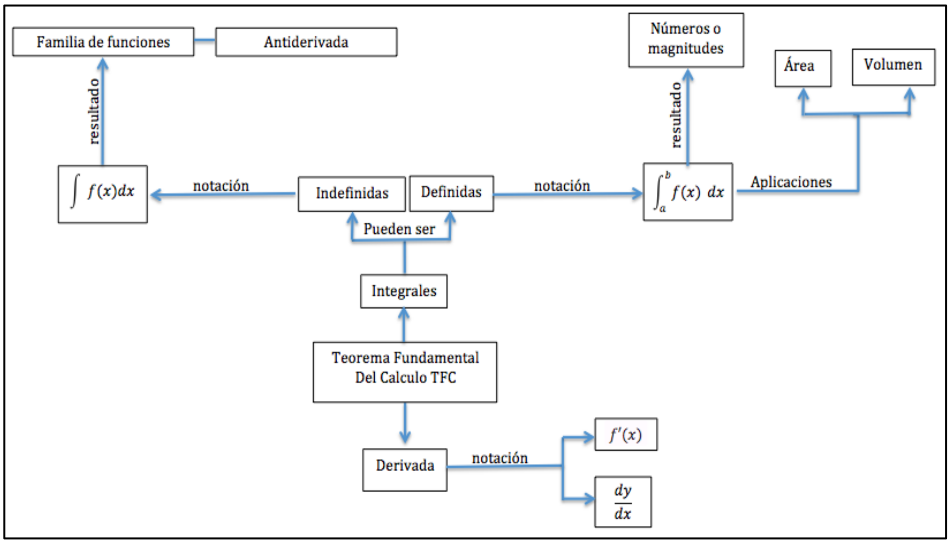

Figura 5. Un mapa conceptual de términos del cálculo infinitesimal

Análisis Ontosemiótico:

Debido a la diversidad de organizaciones que se pueden presentar, no se realiza para ésta el desglose operativo de las configuraciones de objetos y procesos del análisis epistémico. Sin embargo, la construcción que presenten los estudiantes permitirá identificar conflictos epistémicos esenciales, tales como el aceptar o no la correspondencia entre las redes propuestas. Además, el análisis de los mapas conceptuales desde el punto de vista del EOS, permite que se identifiquen las facetas duales de los elementos primarios que se ponen de manifiesto en este tipo de tareas, por ejemplo:

- La dualidad contenido-expresión puede identificarse en el uso de los conceptos y/o proposiciones en los diferentes registros.
- La dualidad personal-institucional, en el proceso intencional de hacer evolucionar el significado personal hacia el institucional pretendido.
- La dualidad ejemplar-tipo, en los argumentos de los estudiantes mediante ejemplos al describirlos como representantes de una clase de objetos más general (formal).
- La dualidad no ostensivo-ostensivo, determinado por la necesidad del registro escrito para facilitar el contraste de las diversas producciones de los estudiantes.
- La dualidad sistémico-elemental, en el papel articulador que cumple la noción de antiderivada en todo el discurso, resaltando las conexiones matemáticas entre las entidades primarias involucradas.

Contenido curricular que se evalúa

La tarea 2, evalúa la organización de conceptos del cálculo infinitesimal y la determinación de relaciones entre las nociones dadas y otras nociones propuestas por el estudiante, en particular evalúa el reconocimiento del objeto de estudio como parte de un elemento de cálculo infinitesimal.

Principales dificultades para su resolución:

Es posible que algunos estudiantes no agreguen nuevos términos a los dados en la tarea o que no se expliquen las conexiones entre los términos.

Tarea 3: diferencia integral – antiderivada

Esta tarea (Figura 6) se diseñó de acuerdo con lo encontrado en el estudio histórico-epistemológico realizado por Gordillo y Pino-Fan (2016). En él se encuentran diferencias conceptuales entre los objetos matemáticos *integral* y *antiderivada*. De esta forma la tarea propuesta ayuda a explorar en los estudiantes la diferencia conceptual sobre estas dos nociones.

Tarea 3. ¿Existe alguna diferencia entre las nociones de integral y antiderivada? Justifica tu respuesta.

Figura 6. Tarea 3: diferencia integral - antiderivada

Solución plausible

Una respuesta a la pregunta de la tarea propuesta, es: sí existe, la noción de integral es generalización de una suma de infinitos sumandos infinitamente pequeños en un intervalo. Generalmente si la integral es definida, está asociada a los conceptos de área o volúmenes de sólidos, cuyos resultados particulares son números o cantidades de magnitud, mientras que la antiderivada es un procedimiento para obtener una familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada, y en la que sus miembros difieren por una constante.

Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

- La sentencia de la pregunta “existe diferencia…” implica análisis que conlleve a la determinación de “idea básica”, en este caso, de dos objetos matemáticos del cálculo infinitesimal, integral y antiderivada, objetos matemáticos que comparten la misma simbología.

Conceptos/Definiciones

- Integral. Suma de sumandos infinitamente pequeños en un intervalo cerrado
- Integral definida. Dar limites al proceso de sumación en una función definida
- Antiderivada. Procedimiento para obtener una familia de funciones, a partir de una función que ha sido derivada.

Propiedades/Proposiciones

- Para comprobar que la antiderivada de una función es correcta, basta con derivar.
- Al asignar un valor especifico a la constante de “integración” se obtiene un miembro de una familia de funciones.
- Al obtener la famila de funciones de una funcion que ha sido derivada y seleccionar el mienbro cuya constante se hace cero (primitiva), es esta primitiva la que se utiliza para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Reflexivo-verbal. En el cual se describen relaciones o diferencias que se piensan sobre la integral y la antiderivada.

Argumentos

- Verbal-deductivo. Basado en los conceptos/definiciones sobre las dos nociones

Contenido curricular que se evalúa:

El contenido curricular que se evalúa con la tarea es la diferencia conceptual del objeto matemático integral y el objeto matemático antiderivada.

Principales dificultades para su resolución

En esta tarea se prevé que el estudiante no encuentre las diferencias entre estos dos objetos y responda que no existen diferencias, que éstas son lo mismo y los términos sinónimos.

Tarea 4: funciones elementales

Esta tarea (Figura 7) se diseñó de acuerdo con lo encontrado en el estudio histórico-epistemológico sobre la antiderivada (Gordillo & Pino-Fan, 2016). El recorrido histórico evidenció un significado parcial para la antiderivada dado por Euler, al determinar que sólo las sumas infinitas expresadas como funciones elementales poseen primitiva, es decir, en términos contemporáneos lo anterior puede ser expresado como “dado el integrando de una función, si éste se puede expresar como función elemental, entonces tiene antiderivada”. De no ser así, se debe acudir a métodos numéricos para calcular la integral en límites establecidos.

Tarea 4. ¿Es posible tener una función en ℝ, que se pueda integrar pero no tenga antiderivada? Justifica tu respuesta.

Figura 7- Tarea 4: funciones elementales

Solución plausible

Una respuesta a la pregunta de la tarea propuesta es: Sí, es posible. Una función que tiene antiderivada se puede expresar como función elemental, es decir, puede ser expresada como suma, resta, multiplicación, división o composición de otras funciones usando un número finito de operaciones algebraicas. Un ejemplo es la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$, ésta puede ser expresada como producto de otras dos, $h(x) = x$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Hay funciones que no pueden ser expresadas como funciones elementales, por ejemplo, la función $f(x) = e^{x^2}$. Por lo tanto, con la expresión $\int e^{x^2}dx$ no es posible encontrar antiderivada. No obstante, sí es posible calcular la integral de la función con límites definidos, por ejemplo, $\int_1^5 e^{x^2}\,dx$, que se puede calcular por medio de integración numérica.

Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

- La expresión “función en ℝ ”, equivale a un elemento transformador, en el que interviene un dominio y un recorrido que conlleva un conjunto numérico
- La expresión “Integrar”, refiere a un procedimiento matemático.
- La expresión “antiderivada”, refiere a un concepto matemático.

Conceptos/Definiciones

- Funciones en ℝ, las cuales se particularizan en aquellas que cumplan con la condición exigida en la tarea.

- Integral, dado como proceso suma de infinitos sumandos infinitamente pequeños.

- Funciones elementales, entendidas como funciones puede ser expresada como suma, resta, multiplicación, división o composición de otras funciones usando un número finito de operaciones algebraicas. Al ejemplificar una función, una de ellas puede ser la función, $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

- Funciones transcendentes. Entendidas como funciones que transcienden al algebra y no pueden ser expresadas como una función elemental. Al ejemplificar una función, una de ellas es la función, $f(x) = e^{x^2}$.

Propiedades/Proposiciones

- Algunas funciones que tienen antiderivada, se pueden expresar como función elemental.

- Hay funciones que no pueden ser expresadas como funciones elementales.

Procedimientos

- Reflexivo-verbal. En el cual se describen las diferencias entre relaciones o diferencias que se piensan sobre la integral y la antiderivada.

- Ejemplificación con casos particulares. A partir de ejemplos de funciones elementales y de funciones transcendentes, se puede dar respuesta a la tarea planteada.

Argumentos

- Empíricos, en los cuales se traten de encontrar ejemplos para confirmar o refutar cierta hipótesis.

- Basado en los ejemplos de funciones elementales y transcendentes, propuestos en los procedimientos y con los conceptos/definiciones dados anteriormente.

Contenido curricular que se evalúa

La tarea 6 evalúa los siguientes contenidos:

- Funciones elementales, concepto matemático asociado a un tipo de funciones que cumple las condiciones de ser expresada como suma, resta, multiplicación, división o composiciones de funciones.

- Integración numérica. En el sentido dado por un procedimiento para el cálculo de integrales definidas.

Principales dificultades para su resolución:

En esta tarea se prevé que el estudiante no responda correctamente si no hay conocimiento matemático sobre las funciones elementales y las funciones trascendentes, tal como se propone en la solución plausible.

Tarea 5: aplicación de la antiderivada a la economía

La tarea 8 (Figura 8) puede verse como una pregunta clásica de aplicación que se presenta en algunos libros de texto universitarios con orientaciones a las ciencias económicas (Haeussler, Paul & Wood, 2008; Arya & Lardner, 2004). Fue incluida para explorar la capacidad de relacionar la noción de antiderivada con otros objetos matemáticos en otros contextos. En este sentido, esta tarea es evaluadora de *conocimiento* y *comprensión* parcial de la noción matemática en contextos diferentes al matemático.

Tarea 5. En economía, la razón de cambio del costo total (C_t) con respecto a la cantidad q de unidades se llama Costo Marginal (C_M), así $C_M = \frac{C_t}{dq}$; suponga que la función de costo marginal de un producto esta dada por $\frac{dC_t}{dq} = 5q^2 - q$ ¿Determine la función de costo total ?

Figura 8. Tarea 5: aplicación de la antiderivada en economía

Solución plausible

Para determinar la función de costo total, dada una función de costo marginal, se deben separar las variables C_T y q; así, $dC_T = (5q^2 - q)dq$. Verificamos que las funciones dadas sean elementales y procedemos a encontrar la antiderivada para cada uno de los elementos en la igualdad $\int C_T dq = \int (5q^2 - q)dq$, esto es, $C_T = \frac{5}{3}q^3 - \frac{1}{2}q^2 + C$. Esta ecuación proporciona el costo total C_T de producir un producto con q unidades, donde $C \in \mathbb{R}$ y C representa el costo fijo de producir de la cantidad q unidades.

Análisis ontosemiótico

A continuación se presenta un análisis de los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, argumentos y procedimientos, y sus significados, que se espera sean activados en la solución de la tarea.

Elementos lingüísticos

- La expresión "Determine la función...", sentencia que alude a un proceso de algoritmización del cual emergerá un procedimiento para encontrar la función costo total.

- $\frac{dC_T}{dq} = 5q^2 - q$. Expresión simbólica que refiere a la función de costo marginal.

- "q". Letra que refiere a una variable que representa la cantidad de unidades de lo que se produce.

- La letra C_T, que refiere a la función de costo total.

Conceptos/Definiciones

- Función de costo marginal. Función que describe el incremento que sufre el costo cuando se incrementa la producción en una unidad; es decir, el incremento del costo total que supone la producción adicional de una unidad de un determinado bien.

- Función de costo total. Función que da el costo que se tiene al producir una cierta cantidad de unidades de un producto.

- Antiderivada, como procedimiento que permite obtener la función de costo total a partir de una función de costo marginal

Propiedades/Proposiciones

- La derivada de la función de costo total es una función de costo marginal.

- La antiderivada de la función de costo marginal nos permite obtener la función de costo total.

Procedimientos

- Método de variables separables para solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y primer grado. Dada una función de costo marginal se deben separar las variables C_T y q; así, $dC_T = (5q^2 - q)dq$. Verificando que la función dada es elemental, procedemos a encontrar la antiderivada para cada uno de los elementos de la función.

Argumentos

- A partir de la proposición, *la antiderivada de la función de costo marginal* permite obtener la función de costo total. Así, el costo total es el significado (institucional) que en las ciencias económicas se le confiere a la antiderivada de la función de costo marginal.

Contenido curricular que se evalúa

La tarea 8 evalúa los siguientes contenidos:

- Funciones y su aplicación a temas de la economía.

- Uso de las "reglas básicas de integración", entendidas como una técnica para encontrar la familia de funciones a partir de una función que ha sido derivada inicialmente.

- Aplicación de la antiderivada y sus propiedades a temas de la economía.

Principales dificultades para su resolución

Se prevé que el estudiante no identifique los símbolos y la notación propios de la economía.

Fiabilidad y validez de contenido de las tareas

Con la finalidad de afianzar la fiabilidad y la validez del contenido de cada una de las tareas; validez entendida como la coherencia e integridad en argumento e interpretación como lo describe Kane (2013), las tareas se sometieron a revisión mediante el *juicio de expertos.* Para el estudio se contactó a seis expertos[6] del área de la Educación Matemática con especialidad en temas de cálculo, que pertenecen a las siguientes universidades: Universidad de Antioquia, Colombia (E1); Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile (E2); Universidad Autónoma de Querétaro, México (E3); Universidad de Sevilla, España (E4); Universidad de Barcelona, España (E5); Universidad Autónoma de Barcelona, España (E6).

Para facilitar la colaboración de los participantes de este estudio, a cada uno de los expertos se les envío un formulario en la que podían opinar libremente, para cada una de las tareas, sobre el grado de relevancia de cada uno de los siguientes aspectos:

1. Distintos significados del objeto antiderivada.

2. Representaciones activadas tanto en los enunciados como en las soluciones plausibles.

3. Contenido matemático de las tareas en relación con el objeto antiderivada; es decir, el vínculo de la antiderivada con otras nociones matemáticas relevantes para su comprensión.

4. Ausencia de algún contenido relevante.

5. Redacción y comprensión de los enunciados.

Para cada uno de los puntos anteriores, los expertos podrían elegir una puntuación entre 1 y 5, siendo 1 nada relevante y 5 totalmente relevante. Adicionalmente, se les proporcionó espacios donde podían plasmar sus opiniones por tarea, y de todas las tareas en general. Las respuestas de los expertos, contribuyeron a la mejora de las características y a la adecuación del nivel de dificultad de las tareas.

En general, las tareas fueron aprobadas y avaladas por parte de los expertos, tanto los enunciados como en las soluciones plausibles de las tareas. La tabla 2 muestra la puntuación media otorgada por cada uno de los expertos.

---

[6] Para este estudio estamos utilizando la palabra "experto" en el sentido de Profesor Investigador asociado a una universidad, reconocido por la comunidad académica por sus publicaciones en revistas de alto impacto registradas en bases de datos de tipo ISI/Web of Knowledge, SciElo, SCOPUS, ERIH, ZDM o Latindex; y experiencia de más de 10 años en didáctica de cálculo.

Tabla 1.
Puntuación media por experto a las tareas

Experto	Puntuación Media
E1	5,0
E2	4,8
E3	4,4
E4	4,2
E5	5,0
E6	5,0

Puntuación en escala (1 a 5); Media= 4,722

Para determinar la calificación de cada experto, se promedió la puntuación asignada a cada uno de los criterios evaluados para cada una de las tareas. Como se puede observar en la, la media total obtenida fue de 4,72 puntos. En la versión definitiva de las tareas se incluyeron las sugerencias y recomendaciones de cada uno de los expertos, estas recomendaciones estaban orientadas en la mejora de la redacción de algunos enunciados y considerar algunos elementos adicionales en las soluciones de las tareas, estos elementos de recomendación corresponden a la dificultad que tiene un estudiante para resolver la tarea propuesta y que fue anexado en el análisis ontosemiótico

Para que la fiabilidad y validez de contenido de cada una de las tareas fuera lo más alta posible, además de las sugerencias de expertos se realizaron, por tarea, los análisis de contenido detallados que se presentaron en la sección 3. Dicho análisis, que denominamos *análisis ontosemiótico*, junto con las herramientas teórico-metodológicas contempladas para llevar a cabo este tipo de estudio, han sido sugeridos y utilizados con el mismo fin en diversos estudios (Pino-Fan & Font, 2015; Pino-Fan, Godino & Font, 2013), y se prevén como potentes para analizar, caracterizar y tener un buen grado de validez de contenido en el diseño de tareas como el que aquí presentamos.

Reflexiones finales

En esta investigación, presentamos el diseño algunas tareas que nos permiten evaluar y caracterizar el conocimiento y las prácticas matemáticas sobre la antiderivada, de estudiantes de los primeros cursos universitarios. La noción de *conocimiento* (conocimiento matemático), desde un punto de vista pragmatista como el adoptado por el EOS, incluye y vincula las actividades de comprensión, competencia y disposición, las cuales intervienen en las prácticas matemáticas que se desarrollan con la finalidad de resolver un problema.

Esta forma pragmática de entender el conocimiento, ha sido considerada en el diseño de cada una de las tareas, toda vez que las tareas requieren para su resolución de la movilización congruente tanto de los diversos registros de representación para la antiderivada (Duval, 1995; 2006a), como de la diversidad de significados parciales de dicha noción matemática (Gordillo & Pino-Fan, 2016).

El análisis ontosemiótico (contenido y curricular), y las posibles dificultades en la resolución de las tareas, realizado para cada una ellas; anterior a la aplicación de las tareas, permite observar, describir y predecir la actividad matemática como un complejo conjunto de prácticas matemáticas realizada por estudiantes universitarios al resolver las tareas propuestas, alrededor del objeto matemático. Prácticas donde se pueden identificar, la configuración de objetos y procesos matemáticos primarios; propuestos por el marco teórico del EOS, que se ha denominado análisis ontosemiótico.

Este análisis ontosemiótico utilizado en cada una de las tareas, se prevé como una herramienta potente para poder identificar y analizar y tener un buen grado de validez de contenido. Herramienta teórico metodológicas del EOS, que es validada y utilizadas en otros diseños de tareas (Pino-Fan & Font, 2015; Pino-Fan, Godino & Font, 2015).

Por otro lado, añadido a lo anterior, el estudio mediante juicio de expertos ha dado evidencia que el diseño de cada una de las tareas, en efecto ~~miden o~~ evalúan lo que se previó en los análisis de contenido, y que se realiza para cada una de ellas. Quedando sustentado el hecho de que, el instrumento diseñado y descrito a lo largo de este artículo, sí evalúa la articulación de los significados institucionales y personales, respecto a la antiderivada, dando así argumentos válidos para determinar que cada una de las tareas es evaluadora de *conocimiento* y *comprensión* parcial, y en su globalidad evaluadora de comprensión, competencia y disposición de la noción antiderivada.

Reconocimientos

Este artículo se ha desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación FONDECYT de iniciación No 11150014, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile.

Referencias

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*. 97-140. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Arya, J. C. & Lardner, R. W. (2004). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* México: Pearson Educación.

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia. (Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España).

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

Bencomo, D., Godino, J. D., & Wilhelmi, M. (2004). Elaboración de redes ontosemióticas de configuraciones didácticas con atlas/ti. En Cañas, A. J, Novak, J. D. & González, F. M. (Eds.). *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology*. *2*, 71-74. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. Educational Studies in Mathematics, 68(1), 19-35.

Crisostomo, E. (2012). Idoneidad de Procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didactica del cálculo y el conocimiento profesional. (Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España).

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. & Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: coordination of two schemas. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 297-304). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

D'Ambrosio, U. (2013). Priorizar história e filosofia da matemática. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8(11),175-186. Disponible en: <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14724/13969 >.

Depool, R. A. (2004). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (pcs). (Tesis doctoral, Universidad de La Laguna, España).

Doorman, M., & Maannen, J. V. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. Australian Senior Mathematics Journal, 22(2), 4-14.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Switzerland: Peter Lang.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103-131.

Duval, R. (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, 9(1), 143-168.

Font, V. (1999). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada. (Tesis doctoral, Universitat de Barcelona, España).

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència, Biaix, 19, 33-36.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educação Matemática Pesquisa, 8(1), 67-98.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. Educational Studies in Mathematics, 77(2), 247-265.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. Bolema, 30(55), 535-558. doi: 10.1590/1980-4415v30n55a12

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25(2), 116-140. doi:10.2307/749505

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Student’s conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. Journal of Mathematical Behavior, 25(1), 52-72.

Haeussler, E. F., Paul, R. S. & Wood, R. J. (2008). Matemáticas para administración y economía. México: Pearson Educación.

Hähkiöniemi, M. (2006). The role of representations in learning the derivative. (Tesis doctoral, University of Jyväskylä, Finland).

Kane, M. (2013). Validating the interpretations and uses of test scores. Journal of Educational Measurement, 50(1), 1-73. doi: 10.1111 / jedm.12000

Kintsch, W. (1998). Comprehension: a paradigm for cognition. Cambridge: Cambridge University Press

Labraña, P. A. (2001). Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral definida. (Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, España).

Metaxas, N. (2007). Difficulties on understanding the indefinite integral. En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), Proceedings of the 31st Conference of the

International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 3, pp. 265-272). Seoul, Korea: PME.

Pino-Fan, L. (2014). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., & Font, V. (2015). A methodologolgy for the desing of questionnaries to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.), Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol. 4, pp. 25-32). Hobart, Australia: PME.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Memorias XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México. 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. Educação Matemática Pesquisa, 13(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (1ª Parte). REVEMAT, 8(2), p. 1-49.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore the mathematical dimension and the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge of teachers. CERME 9, WTG 20: Mathematics teacher knowledge, beliefs and identity. Recuperado de http://www.cerme9.org/products/twg20/

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?. Educational Studies in Mathematics, 26(2-3)165-190. doi: 10.1007/BF01273662

Ponce-Campuzano, J. C., & Rivera-Figueroa, A. (2011). Unexpected results using computer algebraic systems for computing antiderivates. Far East Journal of Mathematical Education, 7(1), 57-80.

Robles, M. G., Del Castillo, A. G., & Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. Educación matemática, 24(1), 35-71. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262012000100003&lng=es&tlng=es.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, A. C.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. ZDM Mathematics Education, 41(1), 481–492.