

# *Colapso gravitacional radiativo esféricamente simétrico en relatividad general: introducción del factor de flujo, el factor de Eddington y la influencia de la relación de clausura entre ellos sobre la evolución del sistema*

A. A. NAVARRO L.\* , L. A. NÚÑEZ\*\*,  
J. A. RUEDA H.\*\*\* & J. D. SANABRIA-GÓMEZ\*

**Resumen.** Se extiende el método H–J–R [*Phys. Rev.* **D22**, 2305 (1980)] utilizando el factor variable de Eddington y el factor de flujo de radiación, y se presenta la influencia de la elección de la relación entre ellos sobre el comportamiento en el tiempo de la densidad, presión, velocidad del fluido y flujo de radiación, entre otras, de un objeto en fase de colapso gravitacional radiativo en el marco de la relatividad general. Para tal fin, se ha utilizado la aproximación poscuasiestática de Herrera et al [*Phys. Rev.* **D65**, 104004 (2002)] con la ecuación de estado Tolman VI y las relaciones de clausura de Lorentz–Eddington, Bowers–Wilson y Maximum Packing, encontrando que la elección de una relación de clausura particular no afecta el comportamiento general del colapso, pero sí afecta los valores instantáneos de las diferentes magnitudes físicas.

---

**Palabras y frases claves:** colapso gravitacional, Relatividad General Clásica, régimen poscuasiestático, estrellas relativistas.

**Keywords:** gravitational collapse, Classical General Relativity, post-quasistatic approximation, relativistic stars.

**PACS:** 04.40.Dg, 95.30.Sf, 04.20.-q, 04.40.Nr.

\* Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia.  
*e-mail:* navarandres@gmail.com, jsanabri@uis.edu.co

\*\* Centro de Física Fundamental, Universidad de Los Andes, y Centro Nacional de Cálculo Científico CECALCULA. Mérida 5010, Venezuela. *e-mail:* nunez@ula.ve

\*\*\* International Center for Relativistic Astrophysics-ICRA and University of Rome “La Sapienza”, I-00185 Rome, Italy. *e-mail:* jorge.rueda@icra.it

**Abstract.** The H–J–Rs’ method [*Phys. Rev.* **D22**, 2305 (1980)] is extended to include the Eddington’s variable factor, the radiation flux factor and a closure relationship between them in order to show its influence on the behavior of density, pressure, fluid velocity and energy radiation flux, among others, of an object under gravitational collapse within the framework of general relativity. The post-quasistatic approximation of Herrera et al [*Phys. Rev.* **D65**, 104004 (2002)] along with the Tolman VI equation of state and the Lorentz–Eddington, Bowers–Wilson and Maximum Packing relationships were used to find that the choice of different closure relationships does not affect the global behavior of the system but only the instantaneous values of the different physical quantities.

## Introducción

La teoría general de la relatividad es la teoría física más aceptada para la descripción de fenómenos en los que están involucrados fuertes campos gravitacionales. Uno de estos fenómenos es el colapso gravitacional que, por su naturaleza de no equilibrio, introduce grandes dificultades para su descripción. Las ecuaciones de campo de Einstein, junto con una elección adecuada del tensor de energía–impulso y una ecuación de estado, representan la forma más sencilla y directa de intentar describir este proceso que, sin embargo, puede estar dotado de algunas otras particularidades que requieran afinar más la descripción. Por ejemplo, la emisión de radiación electromagnética o de neutrinos en el momento del colapso presenta un reto interesante, dado que es uno de los pocos observables que puede existir en el sistema. Pueden, sin embargo, en el sistema presentarse algunas otras situaciones físicas como anisotropía local y ondas de choque (ver [1]), entre otros, que hacen la descripción más rica desde el punto de vista astrofísico. En algunos trabajos se ha tratado de dar cuenta de la descripción de este tipo de fenómenos, particularmente enmarcados en la Relatividad Numérica ([2] y referencias interiores), pero sin lograr aún involucrar todos los elementos físicos mencionados.

Herrera y sus colaboradores enfrentaron el problema del colapso gravitacional esféricamente simétrico en el marco de la relatividad general a través de dos iniciativas: el método H–J–R [3] y la llamada “aproximación poscuasiestática” [4], que consiste básicamente en suponer que las variables físicas en el sistema colapsante toman la misma forma en su parte radial que las correspondientes al caso estático, pudiendo introducir entonces la dependencia temporal a través de funciones arbitrarias del tiempo, que posteriormente son evaluadas en la frontera de la distribución de materia y permiten transformar las

ecuaciones de campo en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para unas ciertas variables auxiliares. Al ser resuelto numéricamente este sistema, los valores obtenidos se utilizan para encontrar el valor numérico de las variables físicas del sistema, esto es, su radio, presión, densidad, velocidad del fluido, entre otras. Barreto et al. [5] presentaron resultados asociados con la emisión de radiación de un sistema en fase de colapso gravitacional utilizando las ecuaciones de estado de Tolman VI y Schwarzschild, para la fase de escape libre de radiación.

En el presente trabajo se presenta una aplicación del formalismo mencionado, que permite introducir emisión de radiación en el sistema bajo fase de colapso y su modelamiento mediante los llamados factor de flujo de radiación  $f$  y factor variable de Eddington  $\chi$  (que sirven para modelar la interacción de la radiación con la materia desde el límite de difusión hasta el de escape libre, contando con que los mecanismos de absorción y dispersión de la radiación en el interior del sistema pueden evitar que la radiación se escape libremente), además de una relación de clausura entre ellos (en la tabla 5 se muestran algunas de ellas), utilizando la ecuación de estado de Tolman VI. El objetivo básico de este trabajo es mostrar las posibles diferencias que se puedan presentar en la evolución del sistema, a través de la ejemplificación de la variación temporal de los valores de las magnitudes físicas de interés (el radio externo del sistema  $A$ , la velocidad del fluido  $\omega$ , la densidad de materia  $\rho$ , la presión de materia  $P$ , la densidad de radiación  $\rho_R$ , la presión de radiación  $P_R$  y flujo de radiación  $\mathcal{F}$ ) en una capa radial en el interior del sistema. Las diferentes relaciones de clausura (ver [6] y referencias interiores para obtener información detallada sobre las mismas) que se utilizarán son las de Lorentz–Eddington (LE), Bowers–Wilson (BW) y Maximum–Packing (MP) que son las más utilizadas para modelar transporte de radiación, aunque en la literatura se cuenta con información de algunas otras relaciones de clausura (ver [7, 8] y referencias interiores).

El formalismo matemático seguido para realizar este trabajo está basado en el trabajo de Herrera et al. [4] y Barreto et al. [5], y es similar al presentado en la referencia [9]; se remite al lector interesado a consultar los detalles del mismo en estos trabajos. Simplemente se debe hacer notar aquí que la elección de presentar gráficas construidas para la capa radial interior  $r = 0,2A$ , siendo  $A$  el radio del sistema, fue arbitraria, y que las condiciones iniciales son las mismas que las usadas en [9]. Es preciso mencionar que el comportamiento general de las magnitudes físicas características del sistema no varían sustancialmente por la elección de una cierta capa radial, por lo que puede afirmarse que las figuras presentadas en seguida dan cuenta de los rasgos principales del colapso en

Clausura	$\chi(f)$
<i>Lorentz-Eddington</i>	$\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{4 - 3f^2}$
<i>Bowers-Wilson</i>	$\frac{1}{3}(1 - f + 3f^2)$
<i>Janka (Monte Carlo)</i>	$\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2}f^{1,31} + 3f^{4,13})$
<i>Maximum Packing</i>	$\frac{1}{3}(1 - 2f + 4f^2)$
<i>Minerbo</i>	$\chi(f) = 1 - 2f/a$ donde $f = \coth a - 1/a$
<i>Levermore-Pomraning</i>	$\chi(f) = f \coth b$ donde $f = \coth b - 1/b$

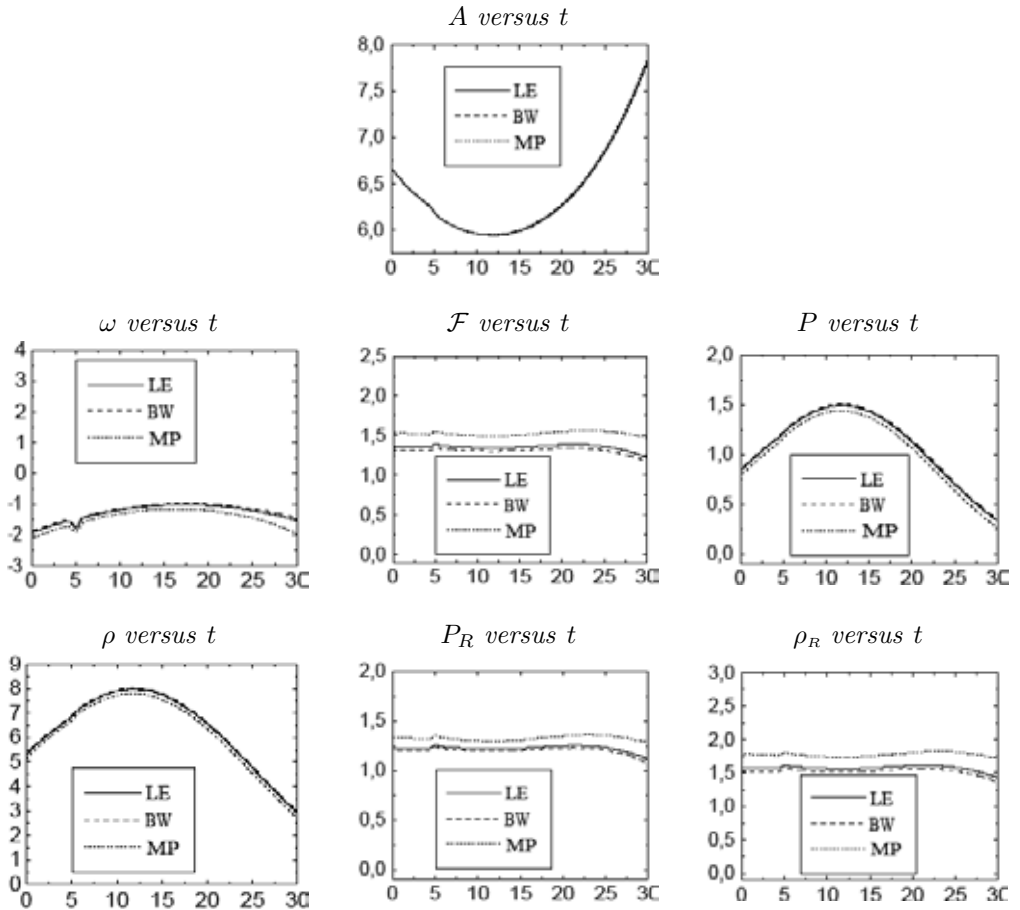
**Tabla 1.** Relaciones de clausura y sus condiciones de aceptabilidad físicas (adaptado de [6])

todo el dominio radial.

En la Figura 1 se muestra la evolución del radio de la frontera de la configuración  $r = A$  y las variables físicas de velocidad del fluido  $\omega$ , flujo de energía  $\mathcal{F}$ , presión de materia  $P$ , densidad de materia  $\rho$ , presión de radiación  $P_R$  y densidad de radiación  $\rho_R$  para una capa radial interna  $r = 0,2A$  en función del tiempo y para un factor de flujo  $f = 0,86$ , que corresponde a un valor intermedio entre escape libre y difusión de la radiación. La primera subfigura muestra la evolución del radio  $A$  de la configuración, que para las condiciones iniciales dadas presenta una fase de colapso inicial y posteriormente una de expansión; se nota igualmente que la elección de una cierta relación de clausura no afecta sensiblemente el comportamiento de la cantidad física.<sup>1</sup>

En las demás subfiguras se presenta una comparación de los resultados obtenidos al utilizar diferentes relaciones de clausura (LE, BW y MP) sobre el sistema para el mismo factor de flujo ( $f = 0,86$ ). En todos los casos se puede observar que la elección de una relación de clausura específica no afecta el comportamiento global de las variables físicas y que solamente permite modular los valores en un tiempo determinado. De la gráfica de  $\omega$  versus  $t$  se deduce que la capa radial interior bajo análisis se está contrayendo en todo momento (esto es, los valores mostrados en la figura son siempre negativos y se contrae a una mayor tasa al final de la ventana de observación, a diferencia del borde de la distribución, que se expande después de pasado un cierto tiempo). La presión  $P$  y la densidad de materia  $\rho$  se comportan de manera físicamente aceptable, primero aumentando cuando el sistema colapsa y luego disminuyendo a medida que el sistema se

<sup>1</sup>Es posible también encontrar otras condiciones iniciales que muestren colapso continuo hasta un cierto radio mínimo, o en la cuales el sistema simplemente no colapse, pero no se muestran aquí.



**Figura 1.** Diferentes variables físicas del sistema (en escala de  $10^3$ ) en función del tiempo (radio exterior de la esfera  $A$ , velocidad del fluido  $\omega$ , densidad de materia  $\rho$ , presión de materia  $P$ , flujo de energía  $\mathcal{F}$ , densidad de radiación  $\rho_R$  y presión de radiación  $P_R$ ), medidas en la capa radial interior  $r = 0,2A$  usando la ecuación de estado Tolman VI y un factor de flujo  $f = 0,86$ . Las diferentes curvas en cada figura corresponden a las relaciones de clausura de Lorentz–Eddington (LE), Bowers–Wilson (BW) y Maximum Packing (MP).

expande. Finalmente, vale la pena mencionar que las condiciones de energía débil, fuerte y dominante fueron verificadas para el sistema.

**Agradecimientos.** Este trabajo ha sido realizado con el apoyo financiero de la Universidad Industrial de Santander a través del proyecto 5150 DIEF–CIENCIAS y bajo el convenio de Cooperación UIS–ULA. J. D. Sanabria-Gómez agradece especialmente a los doctores Jesús Martín y Eduardo Ruiz, de la Universidad de Salamanca, por la hospitalidad brindada durante su estancia en Salamanca (España), donde parte de este trabajo

fue escrito.

## Referencias

- [1] J.A. RUEDA H., L.A. NÚÑEZ, “General Relativistic Radiant Shock Waves in the Post-Quasistatic Approximation”, *J. Phys.: Conf. Ser.* **66**, 012042 (2007).
- [2] J. FONT, “Numerical Hydrodynamics in General Relativity”, *Living Rev. Relativity.* **6**, 4 (2003).
- [3] L. HERRERA, J. JIMÉNEZ, G.J. RUGGERI, “Evolution of radiating fluid spheres in general relativity”, *Phys. Rev.* **D22**, 002305 (1980).
- [4] L. HERRERA, W. BARRETO, A. DI PRISCO, N.O. SANTOS, “Relativistic Gravitational Collapse in noncomoving coordinates: the Post-Quasistatic Approximation”, *Phys. Rev.* **D65**, 104004 (2002). [Preprint gr-qc 0202051]
- [5] W. BARRETO, B. RODRÍGUEZ, H. MARTÍNEZ, “Radiating fluid spheres in the effective variables approximation”, *Astrophys.Space Sci.* **282**, 581 (2002).
- [6] AGUIRRE, L.A. NÚÑEZ, T. SOLDVIERI, “Variable Eddington Factor and Radiating Slowly Rotating Bodies in General Relativity”, Preprint gr-qc 0503085.
- [7] J.A. PONS, J. M<sup>A</sup>. IBÁÑEZ, J.A. MIRALLES, “Hyperbolic character of the angular moment equations of radiative transfer and numerical methods”, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **317**, 550 (2000).
- [8] J.M. SMIT, L.J. VAN DE HORN, S.A. BLUDMAN, “Closure in flux-limited neutrino diffusion and two-moment transport”, *Astron. Astrophys.* **356**, 559 (2000).
- [9] A.A. NAVARRO, L.A. NÚÑEZ, J.A. RUEDA y J.D. SANABRIA-GÓMEZ, “Colapso Gravitacional Radiativo Esféricamente Simétrico en la Aproximación Poscuasi-estática”, *Rev. Col. Fis.* **40**, 210 (2008). Versión electrónica disponible en <http://calima.univalle.edu.co/newrevista>.

A. A. NAVARRO L. & J. D. SANABRIA-GÓMEZ  
 Escuela de Física, UIS, A.A. 678,  
 Bucaramanga, Colombia  
*e-mails:* [navarandres@gmail.com](mailto:navarandres@gmail.com),  
[jsanabri@uis.edu.co](mailto:jsanabri@uis.edu.co)

L. A. NÚÑEZ  
 Centro de Física Fundamental,  
 Universidad de Los Andes, y  
 Centro Nacional de Cálculo Científico CECALCULA,  
 Mérida 5010, Venezuela.  
*e-mail:* [nunez@ula.ve](mailto:nunez@ula.ve)

J. A. RUEDA H.  
 International Center for Relativistic Astrophysics-ICRA and  
 University of Rome “La Sapienza”,  
 I-00185 Rome, Italy.  
*e-mail:* [jorge.rueda@icra.it](mailto:jorge.rueda@icra.it)