# UN TEOREMA DE PUNTOS FIJOS PARA OPERADORES DE LA CLASE D(a,b)

por

**Luis R. Jiménez B.**

**Departamento de Matemáticas y Estadística**

**Universidad Nacional de Colombia**

**Bogotá, D.E., Colombia**

## 1. INTRODUCCION

Sea $\chi$ un espacio normado y $K$ un subconjunto de $\chi$. La clase $D(a,b)$ sobre $K$ está formada por todos los operadores $T : K \to K$ que satisfacen la condición

$$|Tx - Ty| \quad \leq \quad a|x-y| + b[|x-Tx| + |y-Ty|]$$

para todo $x, y$ en $K$, donde $a, b$ son números no negativos.

L. Nova demostró en [3] que todo operador $T \in D(a,b)$ con $a + 2b < 1$, definido sobre un subconjunto cerrado $K$ de un espacio de Banach tiene un único punto fijo. En este artículo demostraremos que si se introduce la hipótesis adicional de que $K$ es también un subconjunto convexo, el resultado anterior permanece válido para operadores $T \in D(a,b)$ sobre $K$ con $a + 2b = 1$, $a < 1$, $b < 1/2$. Observamos también que este resultado generaliza ampliamente los obtenidos en [1] y [2] cuando $c = 0$ y $b < 1/2$, pues elimina las hipótesis de uniformidad convexa y acotamiento.

## 2. SECCION PRINCIPAL

El resultado principal es consecuencia del siguiente lema.

**LEMA.** Sean $K$ un subconjunto convexo de un espacio normado y $T$ un operador de la clase

$D(a,b)$ sobre $K$ con $a+2b=1$, $a<1$, $b<1/2$. Entonces $\inf_{x\in K}|x-Tx|=0$

**DEMOSTRACION.** Para $x$ en $K$ y $n\geq 1$ tenemos

$$|T^{n+1}x-T^nx| \quad\leq\quad a|T^nx-T^{n-1}x|+b||T^nx-T^{n+1}x|+|T^{n-1}x-T^nx||.$$

Luego,

$$|T^{n+1}x-T^nx| \quad\leq\quad [(a+b)/(1-b)]|T^nx-T^{n-1}x|$$

y como, $(a+b)/(1-b)=1$ entonces

(1) $$|T^{n+1}x-T^nx|\leq|T^nx-T^{n-1}x|.$$

Supongamos que $\inf_{x\in K}|x-Tx|=d$ con $d>0$. Sea $e>0$ y escojamos $x\in K$ tal que $|x-Tx|\leq d+e$. Tenemos

$$|T^3x-Tx|\leq|T^2x-x|+b||T^2x-T^3x|+|x-Tx||$$
$$\leq a[|T^2x-Tx|+|Tx-x|]+b||T^2x-T^3x|+|x-Tx||.$$

Por (1),

$$|T^3x-Tx| \quad\leq\quad (2a+2b)|x-Tx| \quad\leq\quad (2a+2b)(d+e)$$

de donde,

(2) $$|T^3x-Tx| \quad\leq\quad (a+1)(d+e)$$

Sea ahora $z=(T^2x-T^3x)/2$. Entonces

$$|z-Tz|\leq(1/2)|T^2x-Tz|+(1/2)|T^3x-Tz|$$

$$\leq(1/2)[a|Tx-z|+b(|Tx-T^2x|+|z-Tz|)]+(1/2)[a|T^2x-z|+b(|T^2x-T^3x|+|z-Tz|)].$$

Se sigue que

$$(1-b)|z-Tz|\leq(1/2)[(a/2)(|Tx-T^2x|+|Tx-T^3x|)+b|Tx-T^2x|]$$
$$+(1/2)[(a/2)|T^2x-T^3x|+b|T^2x-T^3x|];$$

y por (1) y (2)

$$(1-b)|z-Tz|\leq(a/4)(d+e)+(a/4)(a+1)(d+e)+(a/4)(d+e)+b(d+e)$$

Luego,

$$(1-b)d\leq[a/2+(a/4)(a+1)+b](d+e).$$

**Tomando límite cuando $\epsilon \to 0$ tenemos, para $a \neq 0$**

$$1-b \quad \leq \quad (a/2)+(a/4)(a+1)+b.$$

**Puesto que $a+1<2$ se sigue que**

$$1-b \quad < \quad a+b$$

**lo cual contradice que $a+2b=1$.**

**TEOREMA. Sea $K$ un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach y sea $T \in D(a,b)$ con $a+2b=1$, $a<1$, $b<1/2$. Entonces $T$ tiene un único punto fijo en $K$.**

**DEMOSTRACION. Por el lema $\inf_{x\in K}|x-Tx|=0$. Luego existe una sucesión $(y_n)$ de elementos de $K$ tal que $\lim_{n\to\infty}|y_n-Ty_n|=0$.**

**Tenemos**

$$\begin{aligned}|y_n-y_m| &\leq |y_n-Ty_n|+|Ty_n-Ty_m|+|Ty_m-y_m|\\ &\leq |y_n-Ty_n|+a|y_n-y_m|+b[|y_n-Ty_n|+|y_m-Ty_m|]+|Ty_m-y_m|.\end{aligned}$$

**Luego**

$$(1-a)|y_n-y_m| \leq (1+b)[|y_n-Ty_n|+|y_m-Ty_m|]$$

**de donde,**

$$|y_n-y_m| \leq (1+b)/(1-a)[|y_n-Ty_n|+|y_m-Ty_m|]$$

**y por hipótesis se sigue que $(y_n)$ es una sucesión de Cauchy.Como $K$ es cerrado y el espacio es completo, existe $z \in K$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = z$.**

**Usando la desigualdad triangular y el hecho de que $T \in D(a,b)$ tenemos que**

$$|z-Tz| \leq (1+a)/(1-b)|z-y_n|+(1+b)/(1-b)|y_n-Ty_n|.$$

**Ahora, como $y_n \to z$ y $|y_n-Ty_n| \to 0$, resulta que $z$ es un punto fijo de $T$.**

**Si $w$ fuera otro punto fijo de $T$ tendríamos**

$$|w-z| \quad = \quad |Tw-Tz| \quad \leq \quad a|w-z| \quad < \quad |w-z|,$$

**lo cual es imposible.**

**El ejemplo siguiente muestra que la hipótesis de convexidad no se puede eliminar. Consideremos el subconjunto cerrado $K=\{0\}\cup[1,2]$ de $R$ y el operador $T: K \to K$ definido por $Tx=0$ si $x \neq 0$ y $T0=1$. Es fácil ver que $T \in D(1/2,1/4)$, pero por construcción $T$ no tiene puntos fijos.**

**Quiero agradecer a la profesora Lucimar Nova por su valiosa ayuda en la elaboración de este artículo.**

## BIBLIOGRAFIA

[1] K. GOEBEL, W.A. KIRK, T. N. SHIMI, "A fixed point theorem in uniformly convex spaces", Boll. Un. Mat. Ital., (4)7(1973), 63-75

[2] L.R. JIMENEZ, "Un teorema de puntos fijos". Rev. Col. de Mat. (Por aparecer).

[3] L. NOVA, "Fixed point theorems for some discontinuous operators". Pacif. J. Math., 123 (1) (1986), 189-195.