Boletín de Matemáticas
Vol. XXI Nº 2,3 1987 ***APORTES***

SOBRE LOS PUNTOS FIJOS Y DE COINCIDENCIA DE PARES DE APLICACIONES

Jaime Rodríguez Montes

ABSTRACT. A necessary and sufficient condition is given for the existence of common fixed points of couples of maps of a metric space into itself. The result covers others of K.M. Das, R.V. Naik, L.B. Ciric and G. Jungck, and no a priori assumption is made on the completeness of the space, the continuity of the maps or on their commutativity. A similar result for coincidence points of couples of maps is also established.

RESUMEN. Se establece una condición necesaria y suficiente para la existencia de puntos fijos comunes de pares de aplicaciones de un espacio métrico

AMS Classifications: Primary 47H10, Secondary 54H25.
Palabras Clave: Puntos fijos, puntos de coincidencia, diámetro de un conjunto.

en sí mismo, la cual no require condiciones a priori sobre la continuidad o conmutatividad de las mismas ni sobre la completez del espacio. Los resultados obtenidos contienen y generalizan resultados de K.M. Das, R.V. Naik, L.B. Ciric y G. Jungck. Se da también una condición similar para la existencia de puntos de coincidencia de pares de aplicaciones.

INTRODUCCION.

K.M. Das y R.V. Naik han obtenido algunos resultados interesantes sobre puntos fijos comunes de aplicaciones continuas que conmutan y que están definidas de un espacio métrico completo en sí mismo. Estos resultados generalizan otros de L.B. Ciric y G. Jungck y pueden ser a su vez generalizados, bajo condiciones apropiadas, a aplicaciones no necesariamente continuas que conmutan sólo en un punto. De hecho, daremos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de puntos fijos comunes y de puntos de coincidencia de parejas de aplicaciones definidas en un espacio métrico arbitrario, sea que éstas conmuten o nó.

§1. LOS TEOREMAS DE DAS Y NAIK.

Los siguientes son los resultados de Das y Naik [1].

TEOREMA 1.1. *Sean f, g aplicaciones de un espacio métrico completo X en sí mismo. Supóngase que f es continua y que f y g conmutan. Supóngase además que $g(X) \subseteq f(X)$ y que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que*

$$(1.1) \quad d(g(x),g(y)) \leq \alpha \max\{d(f(x),f(y)),d(f(x),g(x)), d(f(y),g(y)),d(f(x),g(y)),d(f(y),g(x))\}$$

para todo par x, y en X. Entonces f y g tienen un punto fijo común, necesariamente único.

TEOREMA 1.2. *Sea f una aplicación de un espacio métrico completo X en sí mismo talque f^2 es continua. Sea $g : f(X) \to X$ tal que $g(f(X)) \subseteq f^2(X)$ y que $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ cuando ambos miembros están definidos. Supóngase además que (1.1) se satisface para todo par x, y en $f(X)$. Entonces f y g tienen un punto fijo común, necesariamente único.*

El Teorema 1.2 es de hecho consecuencia del Teorema 1.1. En efecto, si f y g son como en el enunciado del Teorema 1.2, entonces $G = g \circ f$ y $F = f^2$ satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1. Por lo tanto, existe un único x en X tal que

$$g \circ f(x) = G(x) = F(x) = f^2(x) = x.$$

Se deduce que

$$f \circ g \circ f(x) = f(x)$$

y como f y g conmutan sobre $f(X)$ entonces $f \circ g \circ f(x)$

$= g\circ f^2(x)$, de lo cual

$$g(x) = f(x).$$

Dado que

$$g\circ f(f(x)) = f(x) = f^2(f(x)),$$

de la unicidad de x se deduce finalmente que

$$f(x) = g(x) = x,$$

y x es punto fijo común de f y g, necesariamente único.

§2. EL TEOREMA PRINCIPAL.

Sean f y g aplicaciones de un espacio métrico X en sí mismo, tales que $g(X) \subseteq f(X)$. Entonces es posible construir sucesiones (x_n) y (y_n) en X tales que

(2.1) $\qquad y_n = g(x_n) = f(x_{n+1}), \quad n \geqslant 0.$

En efecto, con $x_o \in X$ arbitrario, sean $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = g(x_o)$ y $y_o = f(x_1)$. Construidos $x_o,\dots,x_n$ y $y_o,\dots,y_{n-1}$, sean $x_{n+1} \in X$ tal que $f(x_{n+1}) = g(x_n)$ y $y_n = f(x_{n+1})$.

Sea ahora

(2.2) $\qquad O(y_k,n) = \{y_k, y_{k+1},\dots,y_{k+n}\}, \quad n \geqslant 0,$

y supóngase que f y g satisfacen la condición (1.1) del Teorema 1.1. Sea $\delta(O(y_k,n))$ el diámetro de

$O(y_k,n)$. Demostraciones de los siguientes lemas pueden encontrarse en [1].

LEMA 2.1. *Si para $k > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\delta(O(y_k,n)) > 0$, entonces*

$$\delta(O(y_k,n)) = d(y_k,y_j) \tag{2.3}$$

donde $k < j \leqslant k+n$. *Además*

$$\delta(O(y_k,n)) \leqslant \alpha\delta(O(y_{k-1},n+1)), \quad k > 1, \tag{2.4}$$

donde $0 < \alpha < 1$.

LEMA 2.2. *Bajo las mismas hipótesis del Lema 2.1,*

$$\delta(O(y_k,n)) \leqslant \frac{\alpha^k}{1-\alpha}d(y_o,y_1). \tag{2.5}$$

El siguiente teorema generaliza el Teorema 1.1.

TEOREMA 2.1. *Sean f y g aplicaciones de un espacio métrico X en sí mismo. Para que f y g tengan un punto fijo común, es necesario y suficiente que existan un subconjunto completo y no vacío K de X y $\alpha \in (0,1)$ tales que*

(i) $g(K) \subseteq f(K) \subseteq K$;

(ii) *para todo par de puntos* x, y *en* K

$$d(g(x),g(y)) \leqslant \alpha max\{d(f(x),f(y)),d(f(x),g(x)), d(f(y),g(y)),d(f(x),g(y)),d(f(y),g(x))\};$$

(iii) *si* $x \in X$ *y existe una sucesión* (x_n) *en* K *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = x,$$

entonces

$$f(x) = g(x).$$

Demostracion. La condición es necesaria, pues si a es punto fijo común de f y g, las condiciones (i), (ii) y (iii) se satisfacen obviamente para $K = \{a\}$ y para todo $\alpha \in (0,1)$. Veamos que es suficiente. Para esto basta demostrar la existencia de $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$, ya que entonces, de (iii), $f^2(x) = g^2(x)$ y, de (ii), con $y = g(x)$, $d(g(g(x)), g(x)) \leq \alpha d(g(g(x)), g(x))$. Esto sólo es posible si $g(g(x)) = g(x)$, de lo cual $f(f(x)) = g(g(x)) = g(x) = f(x)$, y $f(x)$ resultaría ser punto fijo común de f y g.

Sean (x_n) y (y_n) las sucesiones definidas al comienzo de esta sección. Si para algún k y algún $n, \delta(O(y_k, n)) = 0$, entonces $y_k = y_{k+1}$, así que $f(x_{k+1}) = g(x_{k+1})$.

Supongamos entonces que $\delta(O(y_k, n)) > 0$ para todo $k > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, sea n_o tal que

$$\alpha^{n_o} d(y_o, y_1) < (1-\alpha)\varepsilon.$$

Entonces

$$d(y_m, y_n) \leq \delta(O(y_{n_o}, m-n_o)) < \varepsilon, \quad si \ m > n \geq n_o,$$

como resulta del Lema 2.2, así que (y_n) es una sucesión de Cauchy en $g(K)$. Sea entonces $x \in g(K)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = x.$$

La existencia de x resulta de (i) y de la hipótesis sobre K. Pero entonces (iii) implica que $f(x) = g(x)$, y el Teorema queda demostrado. ▲

NOTA 2.1. Obsérvese que la condición (ii) del Teorema 2.1 permite concluir que f y g tienen sobre K un único punto fijo común. En efecto, si $f(x) = g(x) = x$ y $f(y) = g(y) = y$ para x, y en K, entonces, de (ii), $d(x,y) \leqslant \alpha d(x,y)$, así que $d(x,y) = 0$ y $x = y$.

NOTA 2.2. Bajo las condiciones del Teorema 1.1, si $x \in X$ y existe una sucesión (x_n) en K tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = x,$$

entonces $f(x) = g(x)$. En efecto, la continuidad de f conduce a que

$$\lim_{n\to\infty} f^2(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\circ g(x_n) = f(x).$$

Como

$$d(g(f(x_n)),g(x)) \leqslant \alpha \max\{d(f^2(x_n),f(x)),d(f^2(x_n), g(f(x_n))),$$
$$d(f(x),g(x)),d(f^2(x_n),g(x)), d(f(x),f^2(x_n))\},$$

pasando al límite cuando $n \to \infty$, se obtiene que

$d(f(x),g(x)) \leq \alpha d(f(x),g(x))$, o sea, dado que $\alpha < 1$, que $f(x) = g(x)$.

Esta observación muestra que el Teorema 2.1 efectivamente generaliza el Teorema 1.1 y, por lo tanto, también el Teorema 1.2. El siguiente ejemplo ilustra el Teorema 2.1.

EJEMPLO 2.1. Sea $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual y sean $f, g : X \to X$ definidas como sigue: para $0 \leq x \leq 1$, sean

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{3}x, & x \in \mathbb{Q}^c, \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{9}x^2, & x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

Para x en $X-[0,1]$, f y g se definen de tal manera que sean discontinuas y no conmutativas. Tomando $K = [0,1]$ y $\alpha = \frac{1}{2}$, es fácil verificar las condiciones del teorema. El único punto fijo común de f y g en K es $x = 0$.

§3. UN TEOREMA DE COINCIDENCIA.

DEFINICION 3.1. Dados conjuntos no vacíos X y Y, y aplicaciones f, g de X en Y, se dice que $x \in X$ es punto de coincidencia de f y g, si $f(x) = g(x)$.

Haciendo uso de las técnicas anteriores se obtiene:

TEOREMA 3.1. *Sean X y Y espacios métricos y f, g aplicaciones de X en Y. Para que f y g tengan un punto de coincidencia, es necesario y suficiente que existan un subconjunto no vacío de K de X y $\alpha \in (0,1)$ tales que:*

(i) $g(K) \subseteq f(K)$ y $f(K)$ completo.

(ii) Para todo par de puntos x, y en K,

$$d(g(x),g(y)) \leq \alpha \max\{d(f(x),f(y)),d(f(x),g(x)),d(f(y),g(y)), d(f(x),g(y)),d(f(y),g(x))\}.$$

Demostración. Si $x \in X$ es tal que $f(x) = g(x)$, la necesidad de la condición se verifica tomando $K = \{x\}$ y $\alpha \in (0,1)$ arbitrario.

Veamos que son suficientes. Como antes, existen sucesiones (x_n) en X y (y_n) en Y las cuales verifican (2.1) y para las cuales los resultados contenidos en los Lemas 2.1 y 2.2 son igualmente válidos. El mismo argumento usado en la demostración de la suficiencia en el Teorema 2.1 muestra que $f(x_{k+1}) = g(x_{k+1})$ para algún k, lo cual demuestra la afirmación, o que existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x),$$

pues $f(K)$ es completo. Como

$$d(g(x),g(x_n)) \leq \alpha \max\{d(f(x),f(x_n)),d(f(x),g(x)),$$

$$d(f(x_n),g(x_n)),d(f(x),g(x_n)),d(f(x_n),g(x))\},$$

pasando al límite cuando $n \to \infty$ se llegará a que

$$d(g(x),f(x)) \leq \alpha d(f(x),g(x)).$$

Entonces $f(x) = g(x)$, lo cual demuestra el Teorema.

NOTA 3.1. Bajo las condiciones (i), (ii) del Teorema 3.1, si $f(x) = g(x)$ y $f(y) = g(y)$, entonces $f(x) = f(y)$.

NOTA 3.2. La condición (i) del Teorema 3.1 puede reemplazarse por:

(i') $g(K) \subseteq f(K)$, $g(K)$ *completo*.

Agradecimientos. Quiero expresar mis agradecimientos a los profesores Jairo Charris y Lucimar Nova por su ayuda en la redacción de este artículo.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Das, K.M. and Viswanatha Naik, K., *Common fixed point theorems for commutative maps on a metric space*. Proc. Amer. Math. Soc. 77 (3)

(1979), 369-373.

[2] Jungck, G., *Commutating mapping and fixed points*. Amer.Math. Monthly, 83 (1976), 261-263.

[3] Rodríguez, J., *Aplicaciones no conmutativas y puntos fijos*. Por aparecer en Rev. Col. de Mat., Número Especial, 1987.

*

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia.