Boletín de Matemáticas
Vol. XX, Nº 3 (1986) *APUNTES DE SEMINARIO*

ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

María Isabel Otero

Estudiar la evolución de la teoría de conjuntos, el paso de la teoría "ingenua" de Cantor a la teoría axiomatizada de nuestros días, es realmente estudiar la historia de los fundamentos de la matemática sobre todo si dentro de esta, se detiene especialmente en el siglo XIX, siglo en el cual prácticamente todas las ramas de la matemática atravesaron crisis que desembocaron en su consolidación.

Para ello, hay que remontarse en primera instancia al mundo de los griegos. Se sigue es-

---

Trabajo presentado a la profesora Clara Helena Sánchez en el curso de Lógica y Matemática IV (Filosofía de la Matemática) en la carrera de Filosofía de la U. Nacional.

te camino no porque antes de ellos no hubiera existido matemática, de hecho la hubo: "que existiese una matemática prehelénica muy desarrollada es algo que hoy día no puede ponerse en duda. No solamente las nociones (ya de por sí muy abstractas) de número entero y de medida de magnitudes son utilizadas corrientemente en los documentos más antiguos que nos han llegado de Egipto y de Caldea, sino que el álgebra babilónica, por la elegancia y seguridad de sus métodos, no podría ser considerada como una simple colección de problemas resueltos mediante una serie de tanteos empíricos". (N. Bourbaki "Elementos de historia de las matemáticas", p.12), sino por haber sido ellos los primeros en esforzarse por conseguir "demostraciones matemáticas como una sucesión tal que no haya lugar a dudas al pasar de un eslabón al siguiente, forzando al asentimiento universal". (N. Bourbaki opus cit.p.12). Es en los "Elementos de Geometría" de Euclides donde suele verse el origen del método axiomático. Igualmente con esta obra, aparece la geometría como fundamento de las matemáticas. Ella satisfacía, o mejor con ella podía estudiarse, lo que originariamente se consideraba el objeto de estudio de las matemáticas: los números, las magnitudes y las figuras. Sin embargo, con el paso de los siglos, surgen preguntas y problemas que solo en el siglo XIX comienzan a ser resueltos. Por una parte, aunque desde Euclides (s.III a.c.) las matemáticas se fundamentaban en los "Elementos de geometría", esta obra presentaba problemas que la hacían cuestionable.

El quinto postulado de los Elementos, que como postulado debía encerrar una proposición específicamente geométrica que sirviera de fundamento a todo el 'Edificio', parece ambiguo para los matemáticos, y varios de ellos, en diferentes épocas, se esforzaron por demostrarlo, tal como se hace con los teoremas. Sin embargo ninguno de ellos lo logró sin añadir alguna condición a las condiciones dadas. Ya en el siglo XIX se enfrentó el problema suprimiendo el postulado, y buscando saber si su ausencia del sistema llevaría a alguna contradicción; este trabajo realizado por Gauss, Lobatchevski y Bolyai llevó a comprobarse que no se llegaba a contradicción alguna. En este sentido podríamos decir que Euclides ganó, aunque los estudios que le dieron el triunfo condujeron a la aparición de las geometrías no euclidianas. A pesar del "triunfo" del quinto postulado, como postulado, el aparato euclidiano tenía defectos que se fueron haciendo evidentes. Se hizo notar que este "modelo insuperable" se apoyaba más en la intuición de lo que se creía (se creía que no se basaba en ella para nada). Prueba de ello es el constante recurrir a las figuras, que al respecto Blanché hace notar:

"El texto hace creer que las figuras no están ahí sino como simples auxiliares del razonamiento, las cuales duplican en cierta forma la demostración lógica mediante una ilustración sensible, sin serles indispensables. No hay nada de ellos: suprimir la figura trazada o imaginada, y la demostración se viene abajo. No vayamos más lejos de la primera proposición de Euclides, que es un problema: construír un triángulo equilátero sobre un segmento de recta dado *AB*. Se trazan dos círculos de radio *AB*, uno con *A* como centro, otro con *B*: el punto de intersección *M*, cuya distancia a *A* o a *B* es la del radio *AB*, será el tercer vértice buscado. Más para quien no ve o no se representa mentalmente la figura, la demostración es deficiente: ¿Cómo sabe que uno de los dos círculos se cortan? La existencia del punto *M* ha sido mostrada, no demostrada. (...) En las exposiciones clásicas de geometría, un análisis atento descubre así un gran número de proposiciones implícitas. En primer lugar las proposiciones de existencia. (...) Después las proposiciones que se refieren a la congruencia y que están implicadas en diversas operaciones, a las cuales se entrega mentalmente el geómetra. (...) Euclides y sus sucesores, hasta el último siglo, pasaron regularmente en silencio estas propiedades, utilizándolas no obstante a cada paso, porque la visión de las figuras las sugería suficientemente. Es claro que un método riguroso no puede permitirse este recurso permanente a la intuición". (Blanché, "Defectos del Aparato Euclidiano").

Otro punto de crítica a Euclides es la separación entre los axiomas y los postulados. El axioma conlleva la idea de evidencia intelectual, pero de nuevo la "evidencia" nos remite a la intuición, que naturalmente no es la misma en todos. También sucede que hay axiomas que en la interpretación contemporánea no son totalmente válidos. Tal es el caso del que afirma que el todo es mayor que la parte, válido cuando de conjuntos finitos se trata, pero no en el caso de los infinitos. Es criticable también el uso de las definiciones. En parte porque para definir un término es necesario el uso de otro términos, y para evitar la regresión al infinito es mejor partir de unos pocos términos indefinidos. Así las definiciones irán apareciendo poco a poco. Y en parte porque se encuentra que las definiciones iniciales de Euclides realmente no son definiciones sino descripciones empíricas. Blanché nos dice: "Son propiamente designaciones. (...) Practicamente no enuncian las propiedades fundamentales, las que se utilizarán a fin de obtener de ahí todas las otras en las proposiciones donde figurará el término definido. (...) Trátese de falsas definiciones iniciales o de verdaderas definiciones ulteriores, las exposiciones clásicas de geometría cometen con mucha frecuencia el error de presentar como aparentemente simples fórmulas donde se combinan en realidad dos enunciados de naturaleza muy diferente, una proposición y una denominación". (Blanché, opus. Cit.)

Todas estas críticas al sistema euclidiano responden al desarrollo de la lógica en general y de la axiomática en particular. Con ellas y con la aparición de las geometrías no euclidianas, desde 1860 hasta 1885 fueron hechas varias revisiones parciales del sistema euclidiano intentando llenar las lagunas y abandonar la intuición. Pasch es el primero en lograrlo, aunque es la obra de Hilbert "Fundamentos de Geometría" la más importante, pues además de "dar un sistema completo de axiomas para la geometría euclidea, Hilbert clasifica estos axiomas en distintos grupos de naturaleza diferente, y se ocupa de determinar el alcance exacto de cada uno de esos grupos de axiomas, no conformándose con desarrollar las consecuencias lógicas de cada uno de ellos, sino también discutiendo las distintas "geometrías" obtenidas suprimiendo o modifi cando algunos de estos axiomas" (N. Bourbaki. Opus cit. p.32).

Todo esto trajo como consecuencia una revisión de las relaciones entre la matemática y la física. "Para los matemáticos las geometrías no euclidianas tuvieron la virtud de socavar los fundamentos de la geometría euclidiana y de facilitar una nueva concepción de la geometría en la que se elimina toda referencia intuitiva al espacio físico y solo queda subsistente la abstracción". (José Banini, "Historia de las ideas modernas en matemáticas", p.14).

La "verdad matemática" deja de ser "la verdad" en un sentido absoluto referida al mundo de la experiencia sensible. "El hecho de que nuestra geometría elemental, fundada sobre los postulados de Euclides, encuentre tantas aplicaciones útiles en la vida diaria, o resulte adecuada a la solución de ciertos problemas, no es un hecho inherente a la geometría, sino a la naturaleza de los objetos de la vida diaria o de las ramas de la física". (José Banini, opus cit. p.14).

Por otra parte, paralelamente al desarrollo de todo esto, en el siglo XIX también se llevó a cabo la aritmetización del análisis. Basado en los problemas de índole infinitesimal, problemas también muy antiguos (pensemos en las aporías de Zenón de Elea), los trabajos de análisis estaban plagados de intuición, no estaban en absoluto formalizados. Recibían críticas por ser una ciencia incomprensible con conclusiones apoyadas en raciocinios no aceptados por la lógica. "Con Cauchy (1789-1857) el análsis infinitesimal adquiere bases sólidas: precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual (o casi actual) tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o nó, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos otorgan ahora rigor a los fundamentos del análisis, hasta ahora apoyados en una intuición geométrica que quedará eliminada, en especial cuando más tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tagentes" (José Banini opus cit. p.20).

La aritmetización del análisis, antecedida por la aparición de la geometría analítica, que da una "representación" en forma de figura geométrica de la noción de función, significa un cambio en los fundamentos: ellos se basarán aho ra en la aritmética (los objetos de la geometría pueden expresarse con fórmulas). Ese trabajo de aproximación de la aritmética y el análisis se centraba en el estudio de los números irracionales, hallando para ellos un modelo dentro de los números racionales (hacia 1870). Esto fue logrado, siguiendo diferentes caminos, por Cantor, Dedekind, Méray y Weierstrass. Con este adelanto los enteros pasan a ser el fundamento de todas las matemáticas clásicas. "Finalmente los matemáticos empiezan a darse cuenta de que sus trabajos les llevan a ir contra la corriente "natural", y que debe considerarse legítimo en matemáticas razonar acerca de objetos que no posean ninguna interpretación sensible" (N. Bourbaki opus cit. p.36). Viene entonces la axiomatización de la aritmética. Sin embargo el reinado de la aritmética duró poco tiempo, ella hubo de abdicar en favor de la teoría de conjuntos.

Este cambio lo provocó Cantor, con bastantes dificultades (en ello perdió la razón). Hasta esta época las nociones referentes a los conjuntos (o clases) no ofrecían dificultades, y eran asimilables en su mayoría a la lógica aristotélica; es decir, se trabajaba hasta entonces únicamente con las nociones de inclusión y de pertenencia. Pero cuando comenzaban a intervenir las ideas de número cardinal y de magnitud, comenzaban también a surgir las dificultades. Es este el momento en que los matemáticos tuvieron que enfrentar sin más rodeos el problema del infinito, el infinito visto en los dos sentidos: lo infinitamente pequeño o lo infinitamente grande, y esta vez de una forma actual, pues el infinito potencial, aceptado como única posibilidad de infinito desde Aristóteles, pierde su primacía. Bolzano (1781-1848) define la equipotencia de dos conjuntos (dos conjuntos son equipotentes cuando se puede establecer entre sus elementos una correspondencia biunívoca, es decir uno a uno y sobre) y a partir de esta definición diferencia y caracteriza los conjuntos finitos e infinitos: son infinitos aquellos equipotentes con un subconjunto propio (aquí es el punto donde "el todo es mayor que la parte" deja de tener validez absoluta).

Cantor trabaja la equipotencia, la enumerabilidad de los conjuntos, y el problema de la dimensión. Hace notar que el conjunto de los números racionales es enumerable; que los enteros y los reales no son equipotentes; y consigue definir una correspondencia biunívoca entre R y R^N ($N > 1$). Con esto se dedica completamente a la teoría de conjuntos. Introduce la idea de conjunto bien ordenado (un conjunto A se dice bien ordenado por la relación R si todo subconjunto B de A tiene un primer elemento (o mínimo), estudia los números cardinales y formula el "problema del continuo". Demuestra también la desigualdad $n < 2^{n}$. "La teoría cantoriana legitima el infinito actual, este infinito como ser, que está "en la naturaleza de las cosas" y que hasta entonces había estado reprimido, a manera de complejo freudiano, para no permitir emerger a la luz de la conciencia matemática más que el infinito potencial, el infinito como devenir. Y así como el siglo XIX había legislado sobre este infinito potencial, Cantor con su teoría de conjuntos legislará, jerarquizará y clasificará este infinito actual" (José Babini, opus.cit.p.54). A pesar de todos los avances de Cantor, en sus teorías hay lagunas. "Dedekind muestra como la misma noción de entero natural (sobre la que, como hemos visto, había llegado a apoyarse toda la matemática clásica) podía también obtenerse a partir de las nociones fundamentales de la teoría de conjuntos (...) igualmente muestra (antes de Peano) cómo a partir de aquí se obtienen todos los teoremas elementales de la aritmética". (Bourbaki, opus cit. p.49).

La teoría de conjuntos llega a ser problemá tica con la aparición de los conjuntos paradóji cos, esto causado aparentemente por un abuso de la palabra 'todos'. Sin embargo, el problema es más que lingüístico. Hablar del conjunto de todos los conjuntos lleva a contradicción porque podría establecerse una equipotencia entre ese conjunto y el de sus partes propias, lo cual en tra en contradicción con la desigualdad $n < 2^n$ demostrada por Cantor. Las soluciones a estas paradojas varían según las corrientes matemáticas: "La solución de los logicistas (con Russell a la cabeza) fue admitir un llamado "principio del círculo vicioso": un elemento cuya definición implica la totalidad de los elementos de un conjunto, no puede pertenecer a este conjunto, lo que obligó a desarrollar una "teoría de tipos", escalonando las proposiciones en una se rie jerárquica, y a recurrir a un discutible "axioma de reductibilidad". (...) El formalismo puede ver su punto de partida en los "Funda mentos" de Hilbert, que ofrecieron el modelo de una disciplina matemática construida según el método axiomático, método que no sólo era perfectamente adecuado al caracter formal de la ma temática, sino que eliminaba de los fundamentos matemáticos la intuición, con sus hábitos menta les y sus moldes tradicionales. La emergencia de las paradojas implícitas (en la teoría de conjuntos) puso en evidencia que tales hábitos mentales afectaban también al proceso lógico mismo; de ahí la necesidad de axiomatizar esta teoría, tarea en que se empeñaron los formalistas. (...) El intuicionismo cuenta entre sus precursores a Kronecker (1823-1891), decisivo adversario de Cantor, y para quien toda la matemática debía fundarse sobre el número natural, único tipo de número cuya existencia estaba asegurada". (José Babini, opus. cit. pp.60-63).

En general estos fueron los intentos por axiomatizar la teoría de conjuntos:

1. Zermelo (1908): evita los conjuntos "muy grandes" mediante un "axioma de separación", determinando una propiedad $P(x)$ un conjunto, cuando los elementos que poseen dicha propiedad existían ya dentro de un conjunto dado. Esta solución abarcaba paradojas como la "paradoja de Richard". Era necesario restringir el sentido de la noción "propiedad".

2. Von Neumann: precisa la idea de Cantor de distinguir dos tipos de conjuntos, y da dos tipos de objetos, "conjuntos" y "clases". Estas últimas no se localizarían nunca a la izquierda del signo $\in$ (no serían nunca elementos de un conjunto de conjuntos). Reivindica así la noción de "clase universal", clase que no sería un conjunto.

3. Bernays-Gödel: dieron variantes del sistema de von Neumann.

Todas estas soluciones, que al parecer no son definitivas, satisfacen a los formalistas, pero conllevan varias restricciones.

Después de recorrer con enormes pasos el camino desde los griegos hasta comienzos de nuestro siglo XX, para llegar a la conclusión de que en la teoría de conjuntos no se ha dicho todavía la última palabra, debemos mencionar problemas que no son sólo de índole matemática y que han estado presentes a todo lo largo del desarrollo de la teoría. Sólo los mencionaremos ya que una contemplación detallada de estos problemas sobrepasa nuestras capacidades actuales de tiempo y de análisis.

El primer problema, irresoluble, aparentemente, para los matemáticos de la antiguedad, es el del infinito. Es más que un problema psicológico relacionado con la posibilidad de imaginar. Ese tema ha ocupado también a los filósofos, y porqué no decirlo, a los teólogos. Incluso no es extraño encontrarnos con referencias al infinito en relatos mitológicos. El infinito ha sido asociado al mundo de las divini dades, al "lugar sin límites". Sin embargo, parece ser que matemáticamente, se llegó al punto de tratar al infinito como a un número, se le ha desprovisto de "ubicaciones" espaciales. Se nos habla matemáticamente de "cuando el límite de una función tiende al infinito"; o de cardinales transfinitos. ¿Qué pensarían los pitagóricos, que tuvieron cisma en su sociedad secreta por causa de "raíz de dos" si se les hablara de varios tipos de infinito? De nuevo hay que recordar la independencia adquirida por la matemática. No es ya una ciencia empírica, que tenga que dar cuenta de la realidad sensible, es una ciencia teórica, de manera que cuando hablamos de *los* infinitos, no es problema matemático si la naturaleza se ajusta a categorías de este tipo o nó.

Otro problema que tiene también mucho que ver con la "independencia" de la matemática es el sucitado por el predicado de existencia. ¿Cuándo podemos predicar existencia en matemática? Los intuicionistas de comienzos de siglo necesitaban una prueba de existencia de los conjuntos. No aceptaban reducir la noción de entero a la de conjunto. Para algunos matemáticos es necesario que, para que un ente matemático *exista*, se nombre una función que lo defina de modo único. Esto nos remite de forma casi inmediata a plantearnos preguntas extramatemáticas. ¿Hasta qué punto los problemas matemáticos son de índole nominalista? ¿Realmente podemos desterrar los vicios y defectos de los lenguajes naturales con los sistemas formales? ¿Están los problemas realmente en la expresión del pensamiento, o más bien en el pensamiento mismo? ¿Cómo separar el pensar del hablar? Estas preguntas que aquí no tendrán respuesta, dan fin a estas breves reflexiones, sólo nos queda citar a Leibniz:

> *"La matemática universal es, por así decirlo, la lógica de la imaginación"*

*

BIBLIOGRAFIA

Babini, José, *Historia de las ideas modernas en matemática*, Colección de Monografías científicas de la OEA, 1967.

Bourbaki, Nicolás, *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Editorial, 1976.

Blanche, *La axiomática*, México UNAM, 1965.

Nagel, E., Neumann, J., *El Teorema de Gödel*, Editorial Tecnos, 1970.