Boletín de Matemáticas
Vol. XX, Nº 3 (1986) **APUNTES**

ACERCA DEL COMPACTIFICADO DE ALEXANDROFF

Carlos Ruíz S. - Liliana Blanco C.

INTRODUCCION.

Sean (X,τ) un espacio topológico no-compacto y ω un punto que no pertenece a X. Sobre el conjunto $X^+ = X \cup \{\omega\}$ definimos la colección

$$T = \{B^+(x) \mid x \in X^+\}$$

donde

$$B^+(x) = \{A \subseteq X^+ \mid \text{existe } V \in B(x,\tau) \text{ con } V \subseteq A\}; \quad x \neq \omega$$

y

$$B^+(\omega) = \{L \subseteq X^+ \mid L = F \cup \{\omega\},\ F \subset X \text{ y } X\text{-}F \subset K$$
$$\text{siendo } K \text{ compacto de } X\}.$$

Sería de esperarse que la topología

$$\tau^+ = \{A \subseteq X^+ \mid \text{para todo } x \in A,\ A \in \mathcal{B}^+(x)\}$$

generada por la colección $\mathcal{T}$, tuviera como vecindades a $\mathcal{B}^+(x)$, $x \in X^+$. Desafortunadamente esto no siempre se cumple, pues $\mathcal{B}^+(\omega)$ no forma un sistema fundamental de vecindades de ω en todos los casos. Esto último sólo se satisface en aquellos espacios topológicos en los que "compacto" implica "cerrado"; como ocurre en los Espacios de Hausdorff, en los cuales se garantiza que la topología τ^+ generada por $\mathcal{T}$, tiene como vecindades a $\mathcal{B}^+(x)$ con $x \in X^+$.

Ahora bien, aún si suponemos que (X,τ) es un espacio topológico, Hausdorff, no compacto, no necesariamente sucede que el espacio topológico (X^+,τ^+) es de Hausdorff, ya que, si bien los ultrafiltros no triviales $\mathcal{U}$ definidos sobre X satisfacen una de las dos condiciones

(1) $\mathcal{U}$ es más fino que

$$\mathcal{F}_{cc} = \{A \subseteq X \mid X\text{-}A \subseteq K,\ \ K \text{ compacto de } X\}\ ;$$

(2) $\mathcal{U}$ es convergente en X (lo que implica su convergencia en X^+),

nada asegura que ellas sean excluyentes.

En esas condiciones, puede existir un ul-

trafiltro no trivial $\mathcal{U}$ sobre X que sea a la vez más fino que el filtro $\mathcal{F}_{cc}$ y convergente a un punto $x \in X$. Como veremos en 1, $\mathcal{U}$ daría lugar a un ultrafiltro $\mathcal{U}^+$ sobre X^+ que sería convergente a ω y al punto $x \in X \subset X^+$.

Es nuestro objetivo ver bajo qué condiciones el "compactificado" (X^+, τ^+) de un espacio no-compacto Hausdorff (X, τ) es de Hausdorff.

§1. RELACION ENTRE LOS ULTRAFILTROS $\mathcal{U}$ DEFINIDOS SOBRE X Y LOS ULTRAFILTROS $\mathcal{V}$ DEFINIDOS SOBRE X^+.

Consideremos la función

$$\begin{aligned} i: X &\longrightarrow X^+ \\ x &\longmapsto x \end{aligned}.$$

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Tenemos que

$$i_!\mathcal{U} = \mathcal{U}^+ = \{V \subseteq X^+ \mid \text{existe } F \in \mathcal{U} \text{ con } F \subseteq V\}$$

es un ultrafiltro sobre X^+. En efecto, las propiedades de filtro son fáciles de verificar; veamos que $\mathcal{U}^+$ es ultrafiltro. Sea $B \subseteq X^+$, para B hay tres posibilidades:

i) $\mathcal{B} \subseteq X$

ii) $\mathcal{B} = \{\omega\}$

iii) $\mathcal{B} = \mathcal{S} \cup \{\omega\}$ con $\mathcal{S} \subseteq X$.

En el caso i), como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X, entonces $\mathcal{B} \in \mathcal{U}$ ó $X - \mathcal{B} \in \mathcal{U}$ y, por lo tanto, $\mathcal{B} \in \mathcal{U}^+$ ó $X^+ - \mathcal{B} \in \mathcal{U}^+$. En el segundo caso, tenemos que $X^+ - \mathcal{B} = X \in \mathcal{U}^+$; y en el tercer caso, si $\mathcal{S} \in \mathcal{U}$ entonces $\mathcal{B} \in \mathcal{U}^+$ y si $X - \mathcal{S} \in \mathcal{U}$, entonces $X^+ - \mathcal{B} = X - \mathcal{S} \in \mathcal{U}^+$.

Supongamos que $\mathbb{V}$ es un ultrafiltro no trivial sobre X^+, entonces

$$i^! \mathbb{V} = \{A \subseteq X \mid \text{existe } V \in \mathbb{V} \text{ con } i^{-1}(V) \subseteq A\}$$

es un ultrafiltro sobre X.

Si $F \subseteq X$, entonces $i(F) \subseteq X^+$. Como $\mathbb{V}$ es un ultrafiltro sobre X^+, se tiene que $i(F) \in \mathbb{V}$ ó $X^+ - [i(F)] \in \mathbb{V}$

i) Si $i(F) \in \mathbb{V}$, tenemos que $F = i^{-1}(i(F)) \in i^! \mathbb{V}$

ii) Si $X^+ - [i(F)] \in \mathbb{V}$, entonces, puesto que

$$W = X^+ - [i(F)] = (X^+ - F) \cup \{\omega\},$$

tenemos:

$$
\begin{aligned}
i_!\mathcal{V} \supseteq i^{-1}(W) &= i^{-1}((X^+ - F) \cup \{\omega\}) \\
&= i^{-1}(X^+ - F) \cup i^{-1}(\{\omega\}) \\
&= i^{-1}(X^+ - F) \\
&= X - F.
\end{aligned}
$$

De lo anterior, se concluye que si $\mathcal{U}^+$ es un ultrafiltro sobre X^+, entonces, o bien $\mathcal{U}^+ = i_!\mathcal{U}$ para algún $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre X, o bien $\mathcal{U}^+ = \mathcal{F}_{\{\omega\}}$, donde $\mathcal{F}_{\{\omega\}}$ es el ultrafiltro generado por $\{\omega\}$.

Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X convergente a $x \in X$, entonces $\mathcal{U}$ es más fino que el filtro de vecindades de x, $\mathcal{B}(x,\tau)$. En consecuencia, $\mathcal{B}(x,\tau^+) \subseteq \mathcal{U}^+$ y entonces $\mathcal{U}^+$ converge a x.

§2. CLASIFICACION DE LOS ULTRAFILTROS SOBRE UN ESPACIO TOPOLOGICO ARBITRARIO.

En un espacio topológico cualquiera se observa el siguiente hecho concerniente a los ultrafiltros:

TEOREMA 1. Sean (X,τ) un espacio topológico cualquiera y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. Entonces

1. $\mathcal{U}$ es convergente; ó

2. $\mathcal{U}$ es más fino que la colección

$$\mathcal{F}_{cc} = \{A \subseteq X \mid X\text{-}A \subseteq K \text{ para algún } K \text{ compacto de } X\}$$

Demostración. Supongamos que no se cumple 1. y veamos que, en consecuencia, se debe cumplir 2. Si no fuera así, tendríamos para $\mathcal{U}$ que:

i) $\mathcal{U}$ no converge en X; y,

ii) $\mathcal{U}$ contiene algún compacto del espacio, digamos K.

Es fácil demostrar que

$$\mathcal{U}_{|K} = \{A \subseteq K \mid A \supseteq F \cap K \text{ para algún } F \in \mathcal{U}\}$$

es un ultrafiltro sobre K.

Puesto que K es compacto, existe algún $x_o \in K$ límite del ultrafiltro $\mathcal{U}_{|K}$, esto es,

$$\mathcal{B}(x_o, K) \subseteq \mathcal{U}_{|K}.$$

Veamos que $\mathcal{B}(x_o, X) \subseteq \mathcal{U}$, lo cual es una contradicción ya que habíamos supuesto que $\mathcal{U}$ no era convergente.

Sea $U \in \mathcal{B}(x_o, X)$ entonces $U \cap K \in \mathcal{B}(x_o, K)$, luego $U \cap K \in \mathcal{U}_{|K}$, es decir, existe $F \in \mathcal{U}$ tal que

$$F \cap K \subseteq U \cap K.$$

Puesto que $K \in \mathcal{U}$ entonces $F \cap K \in \mathcal{U}$ y por lo tanto $U \cap K \in \mathcal{U}$, de donde, $U \in \mathcal{U}$. ▲

§3. CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS.

En el parágrafo anterior se dieron dos condiciones que permiten la clasificación de los ultrafiltros en un espacio topológico cualquiera. Dichas condiciones, en general, no son excluyentes; esto es, puede suceder que en un espacio topológico haya un ultrafiltro que sea a la vez más fino que la colección $\mathcal{F}_{cc}$ y convergente.

A continuación, daremos una condición necesaria y suficiente para que las proposiciones 1. y 2. del teorema 1 sean excluyentes.

TEOREMA 2. Si (X,τ) es un espacio topológico no-compacto entonces (X,τ) es localmente compacto si y sólo si 1. y 2. son excluyentes.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que (X,τ) es localmente compacto y que existe una ultrafiltro $\mathcal{U}$ de X que es convergente y más fino que $\mathcal{F}_{cc}$.

Sea $x_o \in X$ tal que $\mathcal{U}$ converge a x_o. Como (X,τ) es localmente compacto, existe $V \in \mathcal{B}(x_o,\tau)$ tal que V es compacto. Por lo tanto, $V \in \mathcal{U}$, lo cual es una contradicción porque $\mathcal{U}$ no puede contener compactos.

$\Leftarrow$) Supongamos que 1. y 2. son excluyentes y veamos que (X,τ) es localmente compacto. Si (X,τ) no fuera localmente compacto existiría $x_o \in X$ tal que para toda $V \in \mathcal{B}(x_o,\tau)$ y para todo $K \subset X$ compacto se tendría que $V \cap (X-K) \neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{F}$ el filtro extremo superior de $\mathcal{B}(x_o,\tau)$ y de $\mathcal{F}_{cc}$. Es claro que $\mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{F}_{cc}$ y que $\mathcal{B}(x_o,\tau)$. Ahora bien, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro más fino que $\mathcal{F}$, tenemos que $\mathcal{U}$ converge a x_o y $\mathcal{U}$ es más fino que $\mathcal{F}_{cc}$, lo cual contradice la hipótesis.

Finalmente obtenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 3. (X^+,τ^+) es compacto Hausdorff si y sólo si (X,τ) es localmente compacto Hausdorff.

Demostración. Sea $\mathcal{U}^+$ un ultrafiltro sobre X^+.

Entonces

i) $\mathcal{U}^+ = i_! \mathcal{U}$ para algún ultrafiltro $\mathcal{U}$ de X, ó

ii) $\mathcal{U}^+ = \mathcal{F}_{\{\omega\}}$, donde $\mathcal{F}_{\{\omega\}}$ es el ultrafiltro generado por $\{\omega\}$

Si se satisface (ii) entonces $\mathcal{U}^+$ converge a ω. En el caso de que $\mathcal{U}^+ = i_! \mathcal{U}$ posea algún ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, tenemos que, o bien $\mathcal{U}$ es convergente a $x \in X$, en cuyo caso $\mathcal{U}^+$ convergería a $x \in X \subset X^+$, o bien $\mathcal{U}$ es más fino que $\mathcal{F}_{cc}$, con lo cual $\mathcal{U}^+$ convergería a ω.

Es decir, todos los ultrafiltros $\mathcal{U}^+$ definidos sobre X^+ son convergentes y por consiguiente X^+ es compacto.

Supongamos que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}^+$ sobre X^+ que converge a $x \in X \subset X^+$ y a ω. Entonces como $\mathcal{U}^+ = i_! \mathcal{U}$ para algún ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X, se tiene que $\mathcal{U}$ es convergente a x y $\mathcal{U}$ es más fino que $\mathcal{F}_{cc}$, lo cual es absurdo porque X es localmente compacto. ▲

*

BIBLIOGRAFIA

Bourbaki, N., *General Topology*, Part. I, Addison -Wesley, 1966.

Pervin, William J., *Foundations of General Topology*, Academic Press Inc., 1964.

*

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E.