

## COMPLETADO SECUENCIAL DE $\mathbb{R}^*$

Yu Takeuchi

**RESUMEN.** Se dice que un conjunto totalmente ordenado  $X$  es "superdenso" si dados  $A, B$  dos subconjuntos enumerables de  $X$  no simultáneamente vacíos con  $A < B$  (esto es,  $a < b$  para todo  $a \in A, b \in B$ ) existe siempre  $c \in X$  tal que  $a < c < b$  para todo  $a \in A$ , y, para todo  $b \in B$ . Ver referencias [1], [5]. ▲

Una cortadura de  $\mathbb{R}^*$  es una pareja  $(A, B)$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^*$  tales que

$$A < B, \quad A \cup B = \mathbb{R}^*.$$

Decimos que la cortadura  $(A, B)$  es "regular" si para todo  $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}^*$  existen  $a \in A, b \in B$  tales que

$$b - a < \varepsilon.$$

La cortadura  $(A, B)$  no es regular si existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^*$  tal que

$$y - x \geq \varepsilon_0 \text{ para "todo" } x \in A, y \in B.$$

Para las cortaduras de  $\mathbb{R}^*$  se presentan los siguientes casos:

- (i)  $A$  tiene máximo, o  $B$  tiene mínimo. El máximo de  $A$  (ó el mínimo de  $B$ ) separa a  $A$  de  $B$ . La cortadura  $(A, B)$  es regular.
- (ii)  $A$  es superdenso y  $B$  no es superdenso y no tiene elemento mínimo, ó,  $B$  es superdenso y  $A$  no es superdenso y no tiene elemento máximo. Se demuestra que la cortadura  $(A, B)$  no es regular.
- (iii)  $A$  y  $B$  son superdensos y  $(A, B)$  no es regular. (Se construye un ejemplo de tal cortadura).
- (iv)  $A$  y  $B$  son superdensos y  $(A, B)$  es regular. (Se construye un ejemplo de tal cortadura).

Sea  $(\rho(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  una hipersucesión divergente de Cauchy de elementos en  $\mathbb{R}^*$ , si

$$A = \{ \tau \in \mathbb{R}^* / \text{existe } v_0 \text{ tal que } \tau < \rho(v) \text{ para todo } v > v_0 \}.$$

$$B = \mathbb{R}^* - A = \{ \tau \in \mathbb{R}^* / \text{existe } v_0 \text{ tal que } \rho(v) < \tau \text{ para todo } v > v_0 \},$$

entonces  $(A, B)$  es una *cortadura regular* del tipo (iv). Recíprocamente, a una cortadura  $(A, B)$  del tipo (iv) le corresponde una hipersucesión divergente de Cauchy que la determina. Por lo tanto, la existencia de tal cortadura garantiza que "existen hipersucesiones divergentes de Cauchy en  $\mathbb{R}^*$ ". ▲

Solamente las *cortaduras regulares* sirven para extender el cuerpo  $\mathbb{R}^*$  a otro cuerpo más amplio en el que todas las hipersucesiones de Cauchy convergen. ▲

Sea  $\bar{\mathbb{R}}^*$  la colección de todas las cortaduras *regulares*: tenemos entonces las siguientes propiedades:

- (1)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es un cuerpo ordenado que contiene a  $\mathbb{R}^*$  como subcuerpo propio.
- (2)  $\mathbb{R}^*$  es denso en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ .
- (3) Dado  $\tau \in \bar{\mathbb{R}}^*$  existe una hipersucesión de elementos de  $\mathbb{R}^*$  que converge a  $\tau$ .
- (4)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es superdenso.
- (5) Toda hipersucesión de Cauchy converge en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ .
- (6) Una hipersucesión converge en  $\bar{\mathbb{R}}^*$  si y sólo si ésta es de Cauchy.
- (7)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es un cuerpo *real cerrado*.

(8)  $|\bar{\mathbb{R}}^*| > \aleph$  (bajo la hipótesis del continuo).

Nota. En el presente artículo se supone siempre la hipótesis del continuo.

(9) Tenemos el siguiente teorema de isomorfismo:

Sea  $K$  un cuerpo ordenado tal que

(i)  $K$  posee un subcuerpo isomorfo a  $\mathbb{R}^*$ , denso en  $K$ ,

(ii) toda hipersucesión de Cauchy converge en  $K$ , entonces  $K$  es isomorfo a  $\bar{\mathbb{R}}^*$ . ▲

(10)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es algebraicamente completo, o sea, no existe extensión propia de  $\bar{\mathbb{R}}^*$  a un cuerpo ordenado en el cual  $\bar{\mathbb{R}}^*$  sea denso.

## §1. INTRODUCCION.

En la recta hiperreal  $\mathbb{R}^*$  (ó el cuerpo de los números no-estándar) existen muchos "huecos" ó "brechas"; al llenar algunos de estos "huecos" se obtiene el cuerpo ordenado  $\bar{\mathbb{R}}^*$  que satisface, entre otras, las siguientes propiedades:

(i)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es una extensión propia de  $\mathbb{R}^*$ , algebraicamente completo (o sea que no existe extensión propia a un cuerpo ordenado en el cual  $\bar{\mathbb{R}}^*$  sea denso).

- (ii)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es superdenso (ver resumen).
- (iii)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es un cuerpo real cerrado.
- (iv)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es secuencialmente cerrado, o sea, toda hipersucesión de Cauchy (Nota 1) converge en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ .
- (v)  $|\bar{\mathbb{R}}^*| > \aleph$ , bajo la hipótesis del continuo.

**Nota 1.** Una "sucesión" en  $\mathbb{R}^*$  es una función de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{R}^*$ , y una hipersucesión en  $\mathbb{R}^*$  es una función de  $\mathbb{N}^*$  en  $\mathbb{R}^*$ , donde  $\mathbb{N}^*$  es el conjunto de todos los hipernaturales. Decimos que una hipersucesión  $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  es de Cauchy si para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$  existe  $v_0 \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$v, \mu > v_0 \text{ implica } |\sigma(v) - \sigma(\mu)| < \varepsilon. \blacktriangle$$

## §2. CORTADURAS DE $\mathbb{R}^*$ .

Una cortadura de  $\mathbb{R}^*$  es una pareja  $(A, B)$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^*$  tales que

$$A < B, \quad A \cup B = \mathbb{R}^*.$$

El conjunto  $A$ , siendo acotado superiormente, no siempre posee extremo superior; en tal caso la cortadura  $(A, B)$  representa un "hueco" ó una "brecha" en la recta hiperreal  $\mathbb{R}^*$ ; a continuación examinaremos estos "huecos" existentes en

$\mathbb{R}^*$ .

El conjunto  $A$  puede ser superdenso o no. Si  $A$  es superdenso entonces existe una hipersucesión estrictamente creciente que es cofinal con  $A$ . En efecto (dada la hipótesis del continuo)  $A$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^*$  (en orden), luego existe una inyección  $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow A$  estrictamente creciente; evidentemente la hipersucesión  $(\alpha(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  es estrictamente creciente, y es cofinal con  $A$ .

**Nota 2.** Dado un conjunto ordenado  $X$ , un subconjunto  $S$  de  $X$  se llama "cofinal con  $X$ " si para todo  $x \in X$  existe  $s \in S$  tal que  $x < s$ . Por ejemplo  $\mathbb{N}$  es un subconjunto cofinal con  $\mathbb{R}$  (propiedad arquimediana de  $\mathbb{R}$ ), y  $\mathbb{N}^*$  es un subconjunto cofinal con  $\mathbb{R}^*$  (versión no-estándar de la propiedad arquimediana de  $\mathbb{R}^*$ ). De la misma manera, un subconjunto  $T$  de  $X$  se llama "coinitial con  $X$ " si para todo  $x \in X$  existe  $t \in T$  tal que  $t < x$ .

Recíprocamente, es fácil ver que si existe una hipersucesión estrictamente creciente que es cofinal con  $A$ , entonces  $A$  es superdenso. Si  $A$  no es superdenso, entonces  $A$  puede tener número final (máximo), si no existe una "sucesión" cofinal con  $A$ , estrictamente creciente.

De la misma manera,  $B$  puede ser superdenso o no.  $B$  es superdenso si y sólo si existe una

hipersucesión estrictamente decreciente que es *coinitial* con  $B$ . Si  $B$  no es superdenso entonces  $B$  tiene número inicial (mínimo) ó existe una "sucesión" *coinitial* con  $B$ , estrictamente decreciente.

Si ni  $A$  ni  $B$  es superdenso, entonces  $A$  tiene un subconjunto cofinal enumerable y  $B$  tiene un subconjunto *coinitial* enumerable; por la superdensidad de  $\mathbb{R}^*$  existiría un  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tal que  $A < \{\lambda\} < B$ ; pero esto es imposible ya que  $A \cup B = \mathbb{R}^*$  (absurdo!). Por lo tanto,  $A$  ó  $B$  debe ser superdenso; se presentan los siguientes casos:

(i)  $A$  tiene máximo, ó  $B$  tiene mínimo.

Supongamos que  $A$  tiene máximo; sea  $\delta =$  el máximo de  $A$ , entonces

$$A = (-\infty, \delta] = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \leq \delta\},$$

$$B = (\delta, +\infty) = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > \delta\}.$$

Se observa que  $A$  no es superdenso, que  $B$  es superdenso, y que  $\delta$  es el punto que separa a  $A$  de  $B$ .

De la misma manera, si  $B$  tiene mínimo, entonces  $A$  es superdenso y  $B$  no lo es, y el mínimo del conjunto  $B$  separa a  $A$  de  $B$ .

(ii) Si  $A$  no es superdenso y no tiene *elemento máximo*, entonces  $B$  debe ser superdenso.

En este caso, existe una sucesión cofinal con  $A$  estrictamente creciente, digamos  $(\alpha(k))_{k \in \mathbb{N}}$ . Consideremos el siguiente conjunto contable de números positivos:

$$\{\alpha(k+1) - \alpha(k)/k \in \mathbb{N}\}.$$

Por la superdensidad del conjunto de todos los números no-estándar positivos, existe  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^*$  tal que

$$\alpha(k+1) - \alpha(k) > \varepsilon_0 \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Sea  $\sigma$  cualquier elemento de  $A$ , entonces existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sigma < \alpha(k_0)$ , puesto que  $\{\alpha(k)/k \in \mathbb{N}\}$  es cofinal con  $A$ , luego:

$$\sigma + \varepsilon_0 < \alpha(k_0) + \varepsilon_0 < \alpha(k_0 + 1),$$

o sea que

$$\sigma + \varepsilon_0 \in A. \quad (1)$$

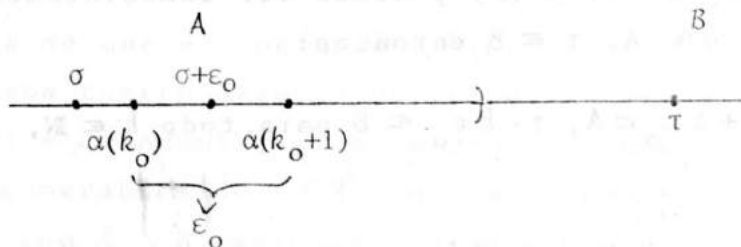


Figura 1

Si  $\tau \in B$  entonces:



$$\tau - \varepsilon_0 \in B \quad (2)$$

puesto que si  $\tau - \varepsilon_0 \in A$  se tendría que  $\tau = (\tau - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 \in A$  (absurdo!).

De lo anterior, para  $\tau \in B$ ,  $\sigma \in A$  se tiene que (Nota 3):

$$\tau - \sigma = 2\varepsilon_0 + (\tau - \varepsilon_0) - (\sigma + \varepsilon_0) > 2\varepsilon_0 \quad (3)$$

o sea que los elementos de  $A$  y los elementos de  $B$  no se acercan; en tal caso decimos que  $A$  y  $B$  no son contiguos, o, que la cortadura  $(A, B)$  "no es regular".

De la misma manera, si el conjunto  $B$  no es superdenso y no tiene elemento mínimo, entonces  $A$  debe ser superdenso. Además la cortadura  $(A, B)$  no es regular.

**Nota 3.** De (1) y (2) podemos ver inmediatamente que si  $\sigma \in A$ ,  $\tau \in B$  entonces:

$$\sigma + k\varepsilon_0 \in A, \tau - k\varepsilon_0 \in B \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

luego:

$$\tau - \sigma > 2k\varepsilon_0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

**EJEMPLO 1.**

$$A = \{\sigma \in \mathbb{R}^* / \sigma \text{ no es infinito positivo}\},$$

$$B = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \text{ es infinito positivo}\},$$

ó

$$A = \{\sigma \in \mathbb{R}^* / \sigma < 0, \delta, \sigma \approx 0\},$$

$$B = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > 0, \gamma, \tau \neq 0\}. \quad \blacktriangle$$

(iii) Ambos conjuntos  $A$  y  $B$  son superdensos, y la cortadura  $(A, B)$  no es regular.

Como no es muy evidente la existencia de tal cortadura en  $\mathbb{R}^*$ , veamos un ejemplo.

**EJEMPLO 2.** Sean  $X$  un conjunto ordenado (orden  $<$ ) isomorfo a  $\mathbb{N}^*$ ,  $Y$  un conjunto ordenado (orden  $<$ ) isomorfo a  $\mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ , con  $X \cap Y = \emptyset$ , entonces  $X \cup Y$  es un conjunto *totalmente ordenado* de acuerdo con el orden establecido en  $X$ , en  $Y$ , y por la relación

$$x < y \quad \text{si } x \in X, y \in Y$$

Se ve que el conjunto  $X \cup Y$  satisface los primeros cuatro axiomas de Peano, y que  $|X \cup Y| = \mathfrak{c}$ . Además, si  $A, B$  son dos subconjuntos enumerables de  $X \cup Y$ , no simultáneamente vacíos, con  $A < B$ , entonces evidentemente existe  $\lambda \in X \cup Y$  tal que

$a < \lambda \leq b$ , para todo  $a \in A$ , y, para todo  $b \in B$ .

Por lo tanto (bajo la hipótesis del continuo), el conjunto  $X \cup Y$  es isomorfo a  $\mathbb{N}^*$  (ver Referencia [5]). Es decir, existe una biyección  $g: X \cup Y \rightarrow \mathbb{N}^*$ , estrictamente creciente.

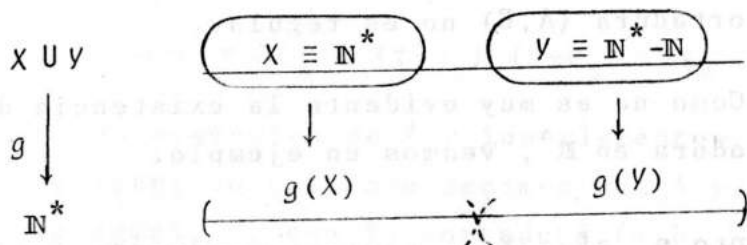


Figura 2

Para  $\tau \in \mathbb{R}^*$ , denotemos por  $\langle \tau \rangle$  "la parte entera" de  $\tau$ ; consideremos la siguiente cortadura  $(A, B)$  de  $\mathbb{R}^*$  dada por:

$$B = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \langle \tau \rangle \in g(Y)\}$$

$$A = \mathbb{R}^* - B = \{\sigma \in \mathbb{R}^* / \sigma < 1, \text{ ó, } \langle \sigma \rangle \in g(X)\},$$

entonces  $A$  y  $B$  son *superdensos*, ya que  $(g(v))_{v \in X}$  es una hipersucesión cofinal con  $A$ , estrictamente creciente; por otra parte el conjunto  $g(Y)$  no tiene mínimo, ni posee subconjunto coinitial enumerable.

Si  $\beta \in B$  entonces  $\langle \beta \rangle \in g(Y)$ , luego:  
 $\langle \beta \rangle - 1 \in g(Y)$ , por lo tanto:

$$\beta - 1 \in B. \quad (4)$$

De la misma manera, si  $\alpha \in A$  entonces

$$\alpha + 1 \in A. \quad (5)$$

De (4) y (5) se tiene que

$$\beta - \alpha > 2 \quad \text{para todo } \alpha \in A, \beta \in B, \quad (6)$$

o sea que la cortadura  $(A, B)$  no es regular.  $\blacktriangle$

(iv) Los dos conjuntos  $A$  y  $B$  son superdensos y la cortadura  $(A, B)$  es "regular", esto es:

dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$  cualquiera, existen  $\alpha \in A$ ,  
 $\beta \in B$  tales que

$$\beta - \alpha < \varepsilon.$$

A continuación, daremos un ejemplo de cortadura  $(A, B)$  de este tipo.

**EJEMPLO 3.** Sea

$$\mathbb{Q}^* = \{ [(q_n)] \in \mathbb{R}^* / q_n \in \mathbb{Q} \text{ para casi todo } n \}$$

la extensión elemental de  $\mathbb{Q}$  (Nota 4), entonces

$\mathbb{Q}^*$  es un subcuerpo ordenado de  $\mathbb{R}^*$ , denso en  $\mathbb{R}^*$ , y además:  $|\mathbb{Q}^*| = \mathcal{L}$ . Sea  $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$  la clausura real de  $\mathbb{Q}^*$  (el mínimo cuerpo real cerrado que contiene a  $\mathbb{Q}^*$ ); ésta está formada por todos los elementos de  $\mathbb{R}^*$  que son algebraicos sobre  $\mathbb{Q}^*$ . Se tiene que  $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^*) \subsetneq \mathbb{R}^*$ ; en efecto, como todo polinomio con coeficientes en  $\mathbb{Q}^*$  es "generado" por una sucesión de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ , y,  $\pi (\in \mathbb{R})$  es trascendente sobre  $\mathbb{Q}$ , entonces  $\pi (\in \mathbb{R}^*)$  es trascendente sobre  $\mathbb{Q}^*$ , esto es  $\pi \notin \mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$ . (ver Referencia [6]).

Como  $\mathbb{Q}^*$  es un cuerpo ordenado superdenso cuya cardinalidad es igual a  $\mathcal{L}$ , entonces también lo es el cuerpo  $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$  (Nota 5). Por el teorema de isomorfismo de los cuerpo reales no-estándar, (y bajo las hipótesis del continuo) se tiene  $\mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^*$  (Nota 6), o sea, existe una biyección

$$\mathcal{Y}: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{Q}^*)$$

que respeta la estructura de cuerpo ordenado.

Consideremos los subconjuntos  $A$ ,  $B$  de  $\mathbb{R}^*$  dados por:

$$A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \mathcal{Y}(\tau) < \pi\}$$

$$B = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \mathcal{Y}(\tau) > \pi\},$$

entonces  $(A, B)$  es una cortadura de  $\mathbb{R}^*$  ya que  $\pi \notin \mathcal{R}(\mathcal{Q}^*) = \mathcal{Y}(\mathbb{R}^*)$ . La cortadura  $(A, B)$  es regular, en efecto, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$  sea  $\hat{\varepsilon} = \mathcal{Y}(\varepsilon)$ . Como  $\mathcal{R}(\mathcal{Q}^*)$  es denso en  $\mathbb{R}^*$ , existen  $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathcal{R}(\mathcal{Q}^*)$  tales que

$$\pi - \frac{1}{2}\hat{\varepsilon} < \hat{\alpha} < \pi, \quad \pi < \hat{\beta} < \pi + \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}$$

Por definición de  $A, B$  se tiene que

$$\alpha = \mathcal{Y}^{-1}(\hat{\alpha}) \in A, \quad \beta = \mathcal{Y}^{-1}(\hat{\beta}) \in B.$$

Como  $\hat{\beta} - \hat{\alpha} < \hat{\varepsilon}$  entonces tenemos que

$$\mathcal{Y}^{-1}(\hat{\beta} - \hat{\alpha}) = \beta - \alpha < \mathcal{Y}^{-1}(\hat{\varepsilon}) = \varepsilon,$$

lo cual demuestra que cortadura  $(A, B)$  es regular.  $\blacktriangle$

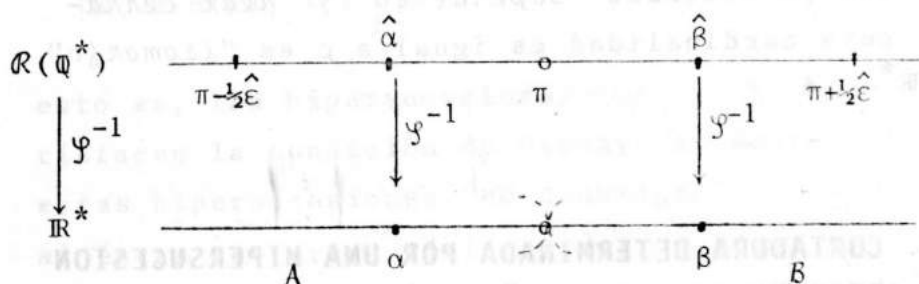


Figura 3

**Nota 4.** Sea  $\mathcal{F}^*$  un ultrafiltro de Frechet en  $\mathbb{N}$ ; dada una sucesión de elementos reales,  $(a_n)$ , decimos que  $a_n$  satisface una propiedad "p" para casi todo  $n$  si:

$$\{n \in \mathbb{N} / a_n \text{ satisface la propiedad "p"}\} \in \mathcal{F}^*.$$

Sabemos que:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$$

donde

$$(a_n) \sim (b_n) \text{ si y sólo si } a_n = b_n$$

para casi todo  $n$ .

**Nota 5.** Sea  $X$  un conjunto ordenado superdenso; si  $Y$  es un subconjunto de  $X$ , denso en  $X$ , entonces  $Y$  también es superdenso.

**Nota 6.** (Teorema de isomorfismo de los cuerpos ordenados). Bajo la hipótesis del continuo, todo cuerpo ordenado superdenso y real cerrado cuya cardinalidad es igual a  $\mathfrak{c}$  es "isomorfo" a  $\mathbb{R}^*$ . ▲

### §3. CORTADURA DETERMINADA POR UNA HIPERSUCESION DE CAUCHY.

Supongamos que una cortadura  $(A, B)$  de  $\mathbb{R}^*$  es

del tipo (iv) ( $A$  y  $B$  son *superdensos* y *regulares*), entonces existen una hipersucesión  $(\alpha(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  *cofinal* con  $A$  estrictamente creciente y una hipersucesión  $(\beta(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  *coinitial* con  $B$  estrictamente decreciente. Además, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$  cualquiera, existe  $v_0 \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\beta(v_0) - \alpha(v_0) < \varepsilon$ , luego:

$$\beta(v) - \alpha(v) < \varepsilon, \quad \beta(\mu) - \alpha(\mu) < \varepsilon \text{ para todo } v, \mu > v_0.$$

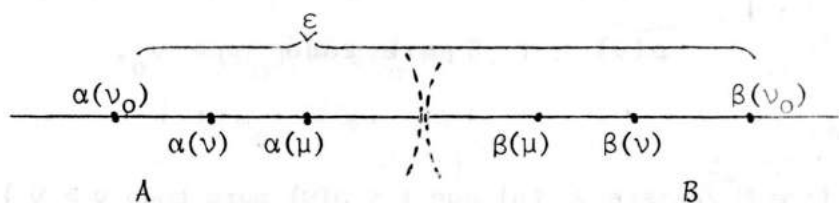


Figura 4

Por lo tanto se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} |\alpha(v) - \alpha(\mu)| < \varepsilon \\ |\beta(v) - \beta(\mu)| < \varepsilon \end{array} \right\} \text{ para todo } v, \mu > v_0; \quad (7)$$

esto es, las hipersucesiones  $(\alpha(v))$ ,  $(\beta(v))$  satisfacen la condición de Cauchy. Evidentemente, estas hipersucesiones "no convergen"; en efecto, si éstas tuvieran límite, éste sería el punto que separa a  $A$  de  $B$ , o sea que se tendría el caso de la cortadura de tipo (i) (absurdo!).



Recíprocamente, supongamos que una hipersucesión  $(\rho(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  es de Cauchy y que ésta no converge. Dado  $\tau \in \mathbb{R}^*$  cualquiera, entonces  $\tau$  no es límite de la hipersucesión de Cauchy  $(\rho(v))$ , luego existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $\rho(v) \notin (\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0)$  para todo  $v \in \mathbb{N}^*$  a partir de algún  $v_0 \in \mathbb{N}^*$ , por lo tanto:

$$\rho(v) < \tau \quad \text{para todo } v > v_0,$$

ó,

$$\rho(v) > \tau \quad \text{para todo } v > v_0.$$

Sean:

$$A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \text{existe } v_0 \text{ tal que } \tau < \rho(v) \text{ para todo } v > v_0\},$$

$$B = \mathbb{R}^* - A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \text{existe } v_0 \text{ tal que } \rho(v) < \tau \text{ para todo } v > v_0\},$$

entonces  $(A, B)$  es una cortadura de  $\mathbb{R}^*$ .

$A$  y  $B$  son *superdensos*. En efecto, supongamos que  $A$  ó  $B$  no fuera superdenso, (caso (ii)), luego existiría  $\varepsilon_0 > 0$  tal que

$$\beta - \alpha > \varepsilon_0 \quad \text{para todo } \alpha \in A, \beta \in B. \quad (8)$$

Como  $(\rho(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  es una hipersucesión de Cauchy, entonces existe  $v_0$  tal que

$$|\rho(v) - \rho(v_0)| < \frac{1}{2} \varepsilon_0 \quad \text{para todo } v > v_0.$$

Por la definición de los conjuntos  $A$  y  $B$  se tiene que

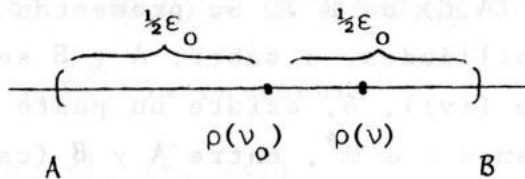


Figura 5

$$\rho(v_0) + \frac{1}{2}\epsilon_0 \in B,$$

$$\rho(v_0) - \frac{1}{2}\epsilon \in A$$

y

$$(\rho(v_0) + \frac{1}{2}\epsilon_0) - (\rho(v_0) - \frac{1}{2}\epsilon_0) = \epsilon_0,$$

esto contradice a (8) (absurdo!)

También, lo anterior nos muestra que la cortadura  $(A, B)$  es regular.

En resumen, tenemos:

"Una hipersucesión divergente de Cauchy determina una única cortadura regular  $(A, B)$  de  $\mathbb{R}^*$ ". La existencia de tal cortadura (Ejemplo 3) implica bajo las hipótesis del continuo que "existen hipersucesiones divergentes de Cauchy en  $\mathbb{R}^*$ ". ▲

#### §4. COMPLETADO PARCIAL DE $\mathbb{R}^*$ .

Sea  $\bar{\mathbb{R}}^*$  la colección de todas las cortaduras "regulares"  $(A, B)$  de  $\mathbb{R}^*$ . Se presentan solamente dos posibilidades, a saber:  $A$  y  $B$  son superdenso (caso (iv)), ó, existe un punto de separación, digamos  $\sigma \in \mathbb{R}^*$ , entre  $A$  y  $B$  (caso (i)). En el segundo caso, consideremos que las dos cortaduras correspondientes al mismo punto de separación  $\sigma$  son "iguales"; para mayor sencillez supongamos que  $\sigma$  pertenece al conjunto  $A$  (esto es,  $B$  es superdenso).

Similarmente al caso de las cortaduras de Dedekind de  $\mathbb{Q}$ , es fácil ver que  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es un cuerpo ordenado que contiene a  $\mathbb{R}^*$  como subcuerpo (① - ⑤).

①  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es un conjunto totalmente ordenado.

Sean  $(A, B), (C, D) \in \bar{\mathbb{R}}^*$ , se define el orden " $<$ " como sigue:

$(A, B) < (C, D)$  si y sólo si  $A \subset C$ .

Evidentemente, el orden " $<$ " es total. ▲

② Sean  $(A, B), (C, D) \in \bar{\mathbb{R}}^*$ ; consideremos la siguiente cortadura:

$(\mathbb{R}^* - (B+D), B+D)$ ,

donde  $B+D = \{\tau+\sigma/\tau \in B, \sigma \in D\}$ . Evidentemente esta cortadura pertenece a  $\bar{\mathbb{R}}^*$ . Se define:

$$(A, B) + (C, D) = (\mathbb{R}^* - (B+D), B+D).$$

③ Dado  $\tau \in \mathbb{R}^*$ , la cortadura

$$((-\infty, \tau], (\tau, +\infty)).$$

pertenece a  $\bar{\mathbb{R}}^*$ . Esta cortadura la identificamos con el número no-estándar  $\tau$ :

$$\tau = ((-\infty, \tau], (\tau, +\infty)).$$

De esta manera, podemos considerar que

$$\mathbb{R}^* \subseteq \bar{\mathbb{R}}^*. \quad \blacktriangle$$

Tenemos entonces:

$$0 + (A, B) = ((-\infty, 0], (0, +\infty)) + (A, B) = (A, B). \quad \blacktriangle$$

④ Sea  $(A, B) \in \bar{\mathbb{R}}^*$ , se define:

$$-(A, B) = (-B, -A) \text{ donde } -A = \{-\alpha/\alpha \in A\},$$

$$-B = \{-\beta/\beta \in B\}$$

entonces:

$$-(A, B) + (A, B) = 0.$$

Nótese que si  $(A, B)$  no fuera regular, entonces no se tendría esto último!

- ⑤ Sean  $(A, B), (C, D) \in \bar{\mathbb{R}}^*$  con  $(A, B) > 0$ ,  $(C, D) > 0$ . Es fácil ver que:

$$(\mathbb{R}^* - B \cdot D, B \cdot D) \in \bar{\mathbb{R}}^* \quad \text{donde}$$

$$B \cdot D = \{\beta \cdot \delta / \beta \in B, \delta \in D\}$$

Se define:

$$(A, B) \cdot (C, D) = (\mathbb{R}^* - B \cdot D, B \cdot D).$$

Si  $(A, B) < 0$ ,  $(C, D) > 0$  se define:

$$(A, B) \cdot (C, D) = -((-A, B)), (C, D)).$$

Si  $(A, B) < 0$ ,  $(C, D) < 0$  se define:

$$(A, B) \cdot (C, D) = (-A, B), -(C, D)).$$

Sea  $\alpha = (A, B) \in \bar{\mathbb{R}}^*$ ,  $\alpha \neq 0$ . Para mayor sencillez, supongamos que  $\alpha = (A, B) > 0$ , entonces existe  $x \in A$ ,  $x > 0$ . Sean:

$$D = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > 0, \frac{1}{\tau} \in A\}, \quad C = \mathbb{R}^* - D,$$

entonces es fácil ver que  $(C, D)$  es una cortadura regular de  $\mathbb{R}^*$ . Si  $\tau \in D$  entonces  $\frac{1}{\tau} \in A$ , luego  $\frac{1}{\tau} < \sigma$  para todo  $\sigma \in B$ , o sea que

$$\tau \cdot \sigma > 1.$$

Como la cortadura  $(A, B)$  es regular, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}^*$  cualquiera, existen  $a \in A$ ,  $b \in B$  tales que

$$x < a, \quad b-a < \epsilon x,$$

luego:

$$\frac{1}{a} \cdot b - 1 = \frac{b-a}{a} < \frac{b-a}{x} < \epsilon,$$

por lo tanto se tiene que

$$B \cdot D = (1, +\infty),$$

esto es:

$$(A, B) \cdot (C, D) = ((-\infty, 1], (1, \infty)) = 1.$$

De esta manera, se ve que  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es un cuerpo que posee a  $\mathbb{R}^*$  como subcuerpo ordenado.  $\blacktriangle$

⑥  $\mathbb{R}^*$  es denso en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ .

Sean  $\tau = (A, B)$ ,  $\sigma = (C, D) \in \bar{\mathbb{R}}^*$  con  $\tau < \sigma$ , entonces

$$A \subsetneq C.$$

Existe  $\beta \in \mathbb{R}^*$  con  $\beta \in C$ ,  $\beta \notin A$ . Como el conjunto  $B$  no tiene mínimo, existe  $\theta \in B$ ,  $\theta < \beta$ , por lo tanto se tiene que

$$\tau = (A, B) < \theta = ((-\infty, \theta], (\theta, +\infty)) < \sigma = (C, D)$$

o sea que  $\mathbb{R}^*$  es denso en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ .  $\blacktriangle$

- ⑦ Sea  $\tau \in \bar{\mathbb{R}}^*$ , entonces existe una hipersucesión de elementos en  $\mathbb{R}^*$  que converge a  $\tau$ .

En efecto, existen  $\theta(v) \in \mathbb{R}^*$  tales que

$$\tau - \frac{1}{v} < \theta(v) < \tau + \frac{1}{v} \quad \text{para todo } v \in \mathbb{N}^*,$$

evidentemente:  $\theta(v) \rightarrow \tau$ . ▲

- ⑧  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es superdenso, puesto que  $\mathbb{R}^*$  es superdenso y denso en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ . ▲

- ⑨ Toda hipersucesión de Cauchy converge en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ .

En efecto, sea  $(\rho(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  una hipersucesión de Cauchy de elementos en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ . Como  $\mathbb{R}^*$  es denso en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ , existen  $\theta(v) \in \mathbb{R}^*$  tales que

$$\rho(v) - \frac{1}{v} < \theta(v) < \rho(v) + \frac{1}{v} \quad \text{para todo } v \in \mathbb{N}^* \quad (9)$$

Evidentemente,  $(\theta(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  es una hipersucesión de Cauchy de elementos en  $\mathbb{R}^*$ , luego ésta determina una cortadura regular  $\theta = (A, B) \in \bar{\mathbb{R}}^*$ . Dado  $\varepsilon \in \bar{\mathbb{R}}^*$ ,  $\varepsilon > 0$  existe  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^*$  tal que

$$0 < \varepsilon_0 < \varepsilon \quad (\text{ya que } \mathbb{R}^* \text{ es denso en } \bar{\mathbb{R}}^*).$$

Como  $(A, B)$  es regular, existen  $\alpha \in A$ ,  $\beta \in B$  tales que

$$\beta - \alpha < \varepsilon_0.$$

Como la hipersucesión  $(\theta(v))$  determina la cortadura  $(A, B)$ , entonces existe  $v_0 \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$\alpha < \theta(v) < \beta \quad \text{para todo } v > v_0,$$

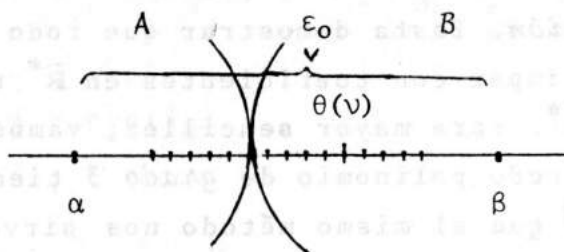


Figura 6

por lo tanto se tiene que

$$|\theta(v) - \theta| < \epsilon_0 < \epsilon \quad \text{para todo } v > v_0,$$

o sea que  $\theta(v) \rightarrow \theta$  en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ . De (9), se tiene que

$$\rho(v) \rightarrow \theta \text{ en } \bar{\mathbb{R}}^*. \blacktriangle$$

(10) Una hipersucesión converge en  $\bar{\mathbb{R}}^*$  si y sólo si es de Cauchy.

(11)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es un cuerpo real, esto es, si  $\tau \in \bar{\mathbb{R}}^*$  con  $\tau > 0$  entonces  $\sqrt{\tau} \in \bar{\mathbb{R}}^*$ . En efecto, sea  $(\theta(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  una hipersucesión de elementos en  $\mathbb{R}^*$  que converge a  $\tau$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\theta(v) > 0$



para todo  $v \in \mathbb{N}^*$ . Evidentemente, la hipersucesión  $(\sqrt{\theta(v)})_{v \in \mathbb{N}^*}$  es de Cauchy, luego ésta converge a un límite en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ , el cual es igual a  $\sqrt{\tau}$ .  $\blacktriangle$

(12)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es un cuerpo real cerrado.

*Demostración.* Basta demostrar que todo polinomio de grado impar con coeficientes en  $\bar{\mathbb{R}}^*$  tiene un cero en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ . Para mayor sencillez, vamos a demostrar que todo polinomio de grado 3 tiene un cero en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ , ya que el mismo método nos sirve para el caso general.

(i) Primero, consideremos una ecuación polinómica de grado 3 con coeficientes reales:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}; \quad (1)$$

sabemos que ésta tiene tres raíces complejas. (contamos raíces múltiples como varias raíces). Sean  $s_k(a, b, c)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) las partes reales de las raíces de la ecuación (1), ordenadas por:

$$s_1(a, b, c) \leq s_2(a, b, c) \leq s_3(a, b, c),$$

y,  $t_k(a, b, c)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) sus partes imaginarias ordenadas por

$$t_1(a, b, c) \leq t_2(a, b, c) \leq t_3(a, b, c).$$

Sabemos que  $s_k(a, b, c)$ ,  $t_k(a, b, c)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) son funciones continuas (de variable  $(a, b, c)$ ) en  $\mathbb{R}^3$ .

(ii) Sea

$$f(\tau) = \tau^3 + \alpha \cdot \tau^2 + \beta \cdot \tau + \gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^* \quad (2)$$

una ecuación polinómica de grado 3 con coeficientes en  $\mathbb{R}^*$ , si  $\alpha = [(a_n)]$ ,  $\beta = [(b_n)]$ ,  $\gamma = [(c_n)]$  entonces:

$$f = \text{gen}(f_n) \quad (\text{Nota 6})$$

donde

$$f_n(x) = x^3 + a_n \cdot x^2 + b_n \cdot x + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

La ecuación (2) tiene tres raíces en  $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}^*(\sqrt{-1})$ . Las partes reales e imaginarias de estas raíces son  $\sigma_k(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\theta_k(\alpha, \beta, \gamma)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) donde:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k(\alpha, \beta, \gamma) &= [(\delta_k(a_n, b_n, c_n))_n] = \delta_k^*(\alpha, \beta, \gamma) \\ \theta_k(\alpha, \beta, \gamma) &= [(\tau_k(a_n, b_n, c_n))_n] = \tau_k^*(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Además, éstas satisfacen:

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 ; \quad \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3.$$

Nótese que  $\delta_k^*$ ,  $\tau_k^*$  son "extensiones elementales" de las funciones reales  $\delta_k$ ,  $\tau_k$  respectivamente.

Como  $\delta_k(a, b, c)$ ,  $\tau_k(a, b, c)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) son continuas en  $\mathbb{R}^3$ , entonces las funciones no-estándar  $\sigma_k (= \delta_k^*)$ ,  $\theta_k (= \tau_k^*)$  son topológicamente con-

tinuas en  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ . Aún más, para cualquier  $M > 0$ ,  $M \in \mathbb{R}^*$ , las funciones no-estándar  $\sigma_k$ ,  $\theta_k$  son "uniformemente" top-continuas en  $[-M, M]^3$  ( $\subset (\mathbb{R}^*)^3$ ).

(iii) Ahora, consideremos la ecuación con coeficientes en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ :

$$\tau^3 + \bar{\alpha} \cdot \tau^2 + \bar{\beta} \cdot \tau + \bar{\gamma} = 0, \quad \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in \bar{\mathbb{R}}^* \quad (4)$$

Por ⑦ existen hipersucesiones  $(\alpha(v))$ ,  $(\beta(v))$ ,  $(\gamma(v))$  tales que

$$\alpha(v) \rightarrow \bar{\alpha}, \quad \beta(v) \rightarrow \bar{\beta}, \quad \gamma(v) \rightarrow \bar{\gamma} \quad (v \rightarrow \infty)$$

con

$$\alpha(v), \beta(v), \gamma(v) \in \mathbb{R}^*.$$

Tomemos  $M > 0$  tal que

$$\alpha(v), \beta(v), \gamma(v) \in [-M, M] \quad \text{para todo } v \in \mathbb{N}^*$$

Como  $\sigma_k(\alpha, \beta, \gamma)$  y  $\theta_k(\alpha, \beta, \gamma)$  son "uniformemente" top-continuas en  $[-M, M]^3$ , entonces las hipersucesiones de elementos en  $\mathbb{R}^*$ :

$$(\sigma_k(\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)))_{v \in \mathbb{N}^*},$$

$$(\theta_k(\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)))_{v \in \mathbb{N}^*}$$

son de Cauchy, luego son convergentes en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ ;

sean:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k(\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)) &\rightarrow \bar{\sigma}_k \\ \theta_k(\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)) &\rightarrow \bar{\theta}_k \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Como la ecuación (2) es de grado impar, entonces una raíz está en  $\mathbb{R}^*$ , luego:

$$\theta_1(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \theta_2(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \theta_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

$$\text{para todo } (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^*)^3,$$

esto es:

$$\begin{aligned} \theta_1(\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)) \cdot \theta_2(\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)) \cdot \theta_3(\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)) \\ = 0 \quad \text{para todo } v \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\bar{\theta}_1 \cdot \bar{\theta}_2 \cdot \bar{\theta}_3 = 0,$$

o sea que  $\bar{\theta}_k = 0$  para "algún"  $k$ . Entonces para algún  $k$ ,  $\bar{\sigma}_k$  es una raíz de la ecuación (4), puesto que la función  $\tau^3 + \bar{\alpha} \cdot \tau^2 + \bar{\beta} \cdot \tau + \bar{\gamma}$  es el límite de  $\tau^3 + \alpha(v) \cdot \tau^2 + \beta(v) \cdot \tau + \gamma(v)$  cuando  $v \rightarrow \infty$ . ▲

**Nota 6.** Dada  $(f_n)$  una sucesión de "funciones rea

les",  $f = \text{gen}(f_n)$  es una función no-estándar de  $\mathbb{R}^*$  en  $\mathbb{R}^*$  definida por:

$$f(\tau) = [(f_n(x_n))] \quad \text{para } \tau = [(x_n)] \in \mathbb{R}^*. \quad \blacktriangle$$

(13)  $|\bar{\mathbb{R}}^*| > \mathcal{C}$ . En efecto bajo la hipótesis del continuo  $|\bar{\mathbb{R}}^*| \geq \mathcal{C}$ . Si  $|\bar{\mathbb{R}}^*| = \mathcal{C}$  entonces  $\bar{\mathbb{R}}^*$  sería isomorfo a  $\mathbb{R}^*$  y esto contradice la existencia de la cortadura regular  $(A, B)$  tal que  $A$  y  $B$  son su perdensos (absurdo!).  $\blacktriangle$

(14) Sea  $K$  un cuerpo ordenado tal que (i)  $K$  posee un subcuerpo isomorfo a  $\mathbb{R}^*$ , denso en  $K$ . (ii) Toda hipersucesión de Cauchy converge en  $K$ , entonces  $K$  es isomorfo a  $\bar{\mathbb{R}}^*$ .

**Demostración.** Dado  $x \in K$ , sean

$$A_x = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \leq x\}, \quad B_x = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > x\},$$

entonces evidentemente  $(A_x, B_x)$  es una cortadura regular de  $\mathbb{R}^*$ , puesto que  $\mathbb{R}^*$  es denso en  $K$ . Si  $x, y \in K$ ,  $x \neq y$  entonces  $(A_x, B_x) \neq (A_y, B_y)$ . En efecto, si  $x < y$  entonces existe  $\tau \in \mathbb{R}^*$  tal que  $x < \tau < y$ . Se tiene que

$$\tau \in B_x, \quad \tau \notin B_y,$$

esto es,  $(A_x, B_x) < (A_y, B_y)$ .

De lo anterior, existe una inyección  $\mathcal{Y}: K \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^*$ , estrictamente creciente.

Y es sobre, o sea que  $\mathcal{Y}$  es una biyección.

En efecto, sea  $\gamma \in \bar{\mathbb{R}}^*$ , entonces existe una hipersucesión  $(\alpha(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  con  $\alpha(v) \in \mathbb{R}^*$  que converge a  $\gamma$ . Como  $(\alpha(v))$  es de Cauchy en  $\mathbb{R}^*$  por densidad de  $\mathbb{R}^*$  en  $K$  también es de Cauchy en  $K$ . Entonces  $(\alpha(v))$  converge en  $K$ ; o sea  $(\alpha(v)) \rightarrow c$  (en  $K$ ). Supongamos que  $\gamma > \mathcal{Y}(c) = (A_c, B_c)$ , entonces existiría  $\sigma \in \mathbb{R}^*$  con  $\mathcal{Y}(c) < \sigma < \gamma$ . Como  $(\alpha(v)) \rightarrow \gamma$  en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ , entonces existe  $v_0 \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$\alpha(v) > \sigma \text{ para todo } v > v_0,$$

luego:

$$c \geq \sigma,$$

así:

$$(A_c, B_c) = \mathcal{Y}(c) \geq \sigma,$$

esto es:

$$\mathcal{Y}(c) < \sigma \leq \mathcal{Y}(c) = (A_c, B_c) \quad (\text{absurdo!}).$$

Por lo tanto, se tiene que  $\gamma \leq \mathcal{Y}(c)$ . De la misma manera se demuestra que  $\gamma \geq \mathcal{Y}(c)$ , por lo tanto se tiene que  $\gamma = \mathcal{Y}(c)$ .

La biyección  $\mathcal{Y}$  respeta la estructura alge-

braica del cuerpo. En efecto, sean  $\rho, \mu \in \bar{\mathbb{R}}^*$  entonces existen hipersucesiones  $(\alpha(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(\beta(v))_{v \in \mathbb{N}^*}$  tales que

$$\alpha(v), \beta(v) \in \mathbb{R}^*, \quad (\alpha(v)) \rightarrow \rho, \quad (\beta(v)) \rightarrow \mu \quad (\text{en } \bar{\mathbb{R}}^*).$$

Tenemos:

$$(\alpha(v) + \beta(v)) \rightarrow \rho + \mu, \quad (\alpha(v) \cdot \beta(v)) \rightarrow \rho \cdot \mu \quad (\text{en } \bar{\mathbb{R}}^*)$$

También:

$$(\alpha(v)) \rightarrow \mathfrak{F}^{-1}(\rho), \quad (\beta(v)) \rightarrow \mathfrak{F}^{-1}(\mu) \quad (\text{en } K),$$

y

$$(\alpha(v) + \beta(v)) \rightarrow \mathfrak{F}^{-1}(\rho) + \mathfrak{F}^{-1}(\mu), \quad (\alpha(v) \cdot \beta(v)) \rightarrow \mathfrak{F}^{-1}(\rho) \cdot \mathfrak{F}^{-1}(\mu) \quad (\text{en } K),$$

por lo tanto tenemos que:

$$\mathfrak{F}^{-1}(\rho + \mu) = \mathfrak{F}^{-1}(\rho) + \mathfrak{F}^{-1}(\mu), \quad \mathfrak{F}^{-1}(\rho \cdot \mu) = \mathfrak{F}^{-1}(\rho) \cdot \mathfrak{F}^{-1}(\mu). \quad \blacktriangle$$

(15)  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es un cuerpo algebraicamente completo, esto es, no existe una extensión propia de  $\bar{\mathbb{R}}^*$  a un cuerpo ordenado en el cual  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es denso.

**Demostración.** Sea  $K$  una extensión del cuerpo ordenado  $\bar{\mathbb{R}}^*$  tal que  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es denso en  $K$ . Como  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es denso en  $\bar{\mathbb{R}}^*$ , entonces  $\bar{\mathbb{R}}^*$  es denso en  $K$ .

Si  $k \in K$  entonces es fácil ver que la corta-

dura  $(A, B)$  dada por:

$$A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \leq k\}, \quad B = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > k\}$$

es una cortadura regular de  $\mathbb{R}^*$ , luego  $\sigma = (A, B)$  pertenece a  $\bar{\mathbb{R}}^* \subset K$ .

Si  $\sigma < k$  entonces existe  $\tau \in \mathbb{R}^*$  con  $\sigma < \tau < k$ , o sea que  $\tau \in A$ , luego  $\tau \leq \sigma$  (absurdo!), por lo tanto se tiene que  $\sigma \geq k$ . De la misma manera, se tiene que  $\sigma \leq k$ , por lo tanto:  $\sigma = k$ , esto es:

$$K = \bar{\mathbb{R}}^*. \quad \blacktriangle$$

\*

## REFERENCIAS

- [1] Gillman y Jerison, *Anillos de Funciones Continuas*, Van Nostrand, 1960.
- [2] Serge, Lang., *Algebra*, Addison Wesley, 1969.
- [3] Dana Scott, *On Completing Orderd Fields, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*. W. A.J. Luxemburg, Ed. Holt, Rinehart and Winston, 1969.
- [4] Y. Takeuchi, "Qué son los números no-estándard", *Mat.Ens.Univ.* N° 33, 1984.



- [5] Y. Takeuchi, "Análisis No-estándar, conjuntos Generados", Mat. Ens. Univ. N° 35, 1985.
- [6] Y. Takeuchi, "Micro-cálculo para funciones generadas", Mat. Ens. Univ. N° 36, N° 37, 1985.
- [7] Y. Takeuchi, "Hipersucesiones y Suma hiperfinita", Apuntes de Seminario, 1985.

\* \*

Departamento de Matemáticas y Estadística  
Universidad Nacional de Colombia  
BOGOTÁ. D.E.