Boletín de Matemáticas
Vol. XX, N° 1 (1986)

MEDIDA DE NO-COMPACIDAD Y ECUACIONES DIFERENCIALES EN ESPACIOS DE BANACH

Wieslawa Kaczor

1. INTRODUCCION.

Sea f una función acotada definida en $[0,T]\times\bar{K}(x_0,r)$ y con valores en un espacio de Banach E de dimensión infinita, donde $\bar{K}(x_0,r)\subseteq E$ es la bola cerrada de centro en x_0 y radio r. Como se sabe, el clásico teorema de Peano y su generalización por Caratheodory no son válidos en espacios de dimensión infinita (J. Dieudonné [5]). En 1970, J. York [10] mostró que el problema inicial de Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

donde f es continua no tiene soluciones en el espacio de Hilbert ($\mathcal{L}^2$). En el artículo de A. Lasota y J. York [8] puede encontrarse un ejemplo más simple en $\mathcal{L}^2$. A. Cellina en [3] da una manera elegante de construir contraejemplos en espacios de Banach no reflexivos. Hasta 1975 no se sabía si los únicos espacios donde vale el teorema de Peano son los de dimensión finita. En este año, A.N. Godunov [7] mostró que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una función continua f tal que el problema (1) no tiene solución. Sin embargo de [8] resulta que "la mayor parte" (en el sentido de categorías de Baire) de las ecuaciones diferenciales con f continua tienen soluciones. A su vez, en este artículo se demuestra que el conjunto $\tilde{\mathcal{H}}$ de las funciones continuas f para las cuales (1) tiene solución es denso y del tipo G_δ en la clase $\mathcal{H}$ de todas las funciones continuas y definidas en $[0,T]\times\bar{K}(x_0,r)$.

Del trabajo de A.N. Godunov es claro que $\mathcal{H}-\tilde{\mathcal{H}}$ es no vacío. Con una ligera modificación de la demostración del teorema de Godunov, G. Pianigiani [9] mostró que $\mathcal{H}-\tilde{\mathcal{H}}$ es denso en $\mathcal{H}$.

Vale la pena entonces buscar teoremas de existencia para (1).

En lo que sigue, vamos a probar un teorema de este tipo, usando como herramienta la noción de medida de no-compacidad.

2. NOTACIONES.

En lo que sigue usaremos las notaciones siguientes: E será un espacio de Banach de dimensión infinita con norma $\|\cdot\|_E$ y θ como cero. Si $X \subseteq E$, denotaremos con $\text{conv}X$ a la envolvente convexa cerrada de X. Vamos a trabajar con las siguientes familias de subconjuntos de E:

$\mathfrak{M}$ - la familia de todos los subconjuntos no vacíos y acotados de E;

$\mathfrak{M}^c$ - la subfamilia de $\mathfrak{M}$ de todos los cerrados;

$\mathfrak{N}$ - la familia de todos los subconjuntos no vacíos y relativamente compactos de E.

Definimos las operaciones algebraicas sobre conjuntos de la manera usual:

$$X+Y = \{x+y\colon\ x \in X \text{ y } y \in Y\}\ ;\quad X \subseteq E,\quad Y \subseteq E$$

$$\lambda X = \{\lambda x\colon\ x \in X\}\ ;\quad \lambda \in \mathbb{R},\quad X \subseteq E.$$

3. MEDIDA DE LA NO-COMPACIDAD.

Consideremos primero los llamados núcleos de medida.

DEFINICION 1. Se denomina núcleo de medida de no-compacidad a toda familia no vacía $\mathcal{P}$ que satisfaga las condiciones siguientes:

1) Si $X \in \mathcal{P}$ entonces $\bar{X} \in \mathcal{P}$
2) Si $X \in \mathcal{P}$, $Y \subset X$ y $Y \neq \emptyset$, entonces $Y \in \mathcal{P}$
3) Si $X, Y \in \mathcal{P}$ y $\lambda \in [0,1]$ entonces $\lambda X+(1-\lambda)Y \in \mathcal{P}$
4) Si $X \in \mathcal{P}$ entonces $\text{conv}X \in \mathcal{P}$
5) $\mathcal{P}^c$ es cerrado en $\mathfrak{M}^c$ con respecto a la topología de Hausdorff ($\mathcal{P}^c$ es la subfamilia de todos los cerrados de $\mathcal{P}$).

DEFINICION 2. Una función $\mu: \mathfrak{M} \to [0,\infty)$ se denomina una medida de no-compacidad con núcleo $\mathcal{P}$ ($N(\mu) = \mathcal{P}$) si cumple las condiciones siguientes:

1) $\mu(X) = 0$ si y sólo si $X \in \mathcal{P}$
2) $\mu(X) = \mu(\bar{X})$
3) Si $X \subset Y$ entonces $\mu(X) \leq \mu(Y)$
4) $\mu(\text{conv}X) = \mu(X)$
5) $\mu(\lambda X+(1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X)+(1-\lambda)\mu(Y)$ donde $\lambda \in [0,1]$

6) Si $X_n \in \mathfrak{M}^c$, $X_{n+1} \subset X_n$ para $n = 1,2,\ldots$ y si $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$ entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es no vacío.

Llamaremos medidas sublineales a las que además cumplan

7) $\mu(X+Y) \leqslant \mu(X) + \mu(Y)$

8) $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Los núcleos de las medidas sublineales son cerrados con respecto a las operaciones algebraicas.

Hay muchos ejemplos de medidas de no-compacidad; las bien conocidas medidas de Kuratowski y de Hausdorff tienen las propiedades 1) - 8).

Si $x \in C([0,T], E)$ escribiremos

$$\|x\|_C = \max\{\|x(t)\|_E : t \in [0,T]\}$$

y

$$X(t) = \{x(t) : x \in X\} \text{ para } X \subset C([0,T],E).$$

El número

$$\omega(x,\varepsilon) = \sup\{\|x(t)-x(s)\|_E : t,s \in [0,T] \text{ y } |t-s| \leqslant \varepsilon\}$$

es el llamado *módulo de continuidad* de la función $x \in C([0,T],E)$ y si $X \subset C([0,T],E)$

$$\omega(X,\varepsilon) = \sup\{\omega(x,\varepsilon) : x \in X\}$$

es el llamado módulo común de continuidad de todos los $x \in X$.

Escribiremos también

$$\omega_o(X) = \lim_{\varepsilon\to o} \omega(X,\varepsilon)$$

Sean μ una medida de no-compacidad en E y

$$\mu^*(X) = \sup\{\mu(X(t)) : t \in [0,T]\}$$

Se tiene, según se puede ver en [2], el siguiente

LEMA 1. La función

$$\tilde{\mu}(X) = \omega_o(X) + \mu^*(X)$$

es una medida de no-compacidad en $C([0,T],E)$ cuyo núcleo es la familia de todos los subconjuntos acotados y equicontinuos (todas las $x \in X$ son equicontinuas) X de $C([0,T],E)$ tales que $X(t) \in N(\mu)$ para todo $t \in [0,T]$.

Escribiendo

$$\int_o^t X(s)ds = \{ \int_o^t x(s)ds \ : x \in X \}$$

podemos concluir el resultado que puede verse en [6] del siguiente

LEMA 2. Si $X \subset C([0,T],E)$ es acotado y equicontinuo, y si μ es una medida de no-compacidad sublineal en E, entonces

$$\mu\left(\int_0^t X(s)\,ds\right) \leqslant \int_0^t \mu(X(s))\,ds.$$

4. TEOREMA DE EXISTENCIA.

Vamos a demostrar un teorema que generaliza resultados de K. Goebel y C. Dacka [4].

TEOREMA. Sea $f:[0,T]\times\bar{K}(x_0,r) \to E$ uniformemente continua y tal que $\|f(t,x)\|_E \leqslant M$, donde $MT \leqslant r$. Sea μ una medida de no-compacidad sunlineal en E tal que $\{x_0\} \in N(\mu)$. Supongamos que para cada $t \in [0,T]$ y $X \subset \bar{K}(x_0,r)$

$$\mu(f(t,X)) \leqslant L_n(\mu(X))^{p_n} \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$. Supongamos además que existe una constante A tal que

$$L_n \leqslant A\,S_n, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

donde $S_n = 1+p_1p_2\ldots p_n+p_2\ldots p_n+\ldots+p_n$.

Entonces, el problema de Cauchy (1) tiene por lo menos una solución x definida en $[0,T]$ y tal que $\{x(t)\} \in N(\mu)$ para $t \in [0,T]$.

Demostración. Podemos suponer, sin perder generalidad, que las sucesiones $(p_n)_{n=1,\ldots}$ y $(L_n)_{n=1,\ldots}$ son crecientes.

Es evidente que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ ya que $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

Denotemos con F al operador integral definido por

$$(4) \qquad (Fx)(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds.$$

Sean también

$$X_0 = \{x \in C([0,T],E) : x(0) = x_0 \text{ y}$$

$$(5) \qquad \|x(s)-x(t)\|_E \leqslant M|t-s|\}$$

$$X_{n+1} = \text{conv}F\ X_n, \qquad n = 0,1,\ldots$$

Todos los X_n son acotados, cerrados, convexos y equicontinuos.

Además

$$(6) \qquad \mu(X_0(t)) \leqslant Mt\ \mu(K(\theta,1)).$$

Tenemos también que

$$\mu(X_1(t)) \leq \mu\left(\int_0^t f(s, X_0(s))\,ds \right).$$

Al aplicar el Lema 2 a esta desigualdad se obtiene que

$$\mu(X_1(t)) \leq \int_0^t \mu(f(s, X_0(s)))\,ds$$

y de (2), (3) y (6) resulta que

$$\mu(X_1(t)) \leq \int_0^t L_1 (\mu(X_0(s)))^{p_1}\,ds$$

$$\leq \int_0^t L_1 (Ms\,\mu(K(\theta,1)))^{p_1}\,ds = \frac{L_1}{1+p_1} (M\mu(K(\theta,1)))^{p_1}\, t^{p_1+1}$$

$$\leq (At)^{s_1} \left(\frac{M\mu(K(\theta,1))}{A}\right)^{p_1}.$$

Análogamente

$$\mu(X_2(t)) \leq \int_0^t L_2 (\mu(X_1(s)))^{p_2}\,ds$$

$$\leq L_2 \, \frac{L_1^{p_2} (M\mu(K(\theta,1)))^{p_1 p_2}}{(1+p_1)^{p_2}(1+p_1 p_2 + p_2)}\, t^{s_2}$$

$$\leq (At)^{s_2} \left(\frac{M\mu(K(\theta,1))}{A}\right)^{p_1 p_2}$$

y por inducción

$$(7) \quad \mu(X_n(t)) \leqslant (At)^{S_n} \left(\frac{M\mu(K(\theta,1))}{A}\right)^{p_1 p_2 \cdots p_n}.$$

Pero la sucesión

$$\left(\left(\frac{M\mu(K(\theta,1))}{A}\right)^{p_1 p_2 \cdots p_n}\right)_{n=1,2,\ldots}$$

es acotada y si $t < 1/A$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} (At)^{S_n} = 0.$$

Si $[0,T] \subset [0,1/A)$ entonces

$$(8) \quad \lim_{n\to\infty} \mu(X_n(t)) = 0 \text{ uniformemente sobre } [0,T]$$

Sea ahora $\tilde{\mu}$ la medida de no-compacidad en $C([0,T],E)$, definida en el Lema 1. Entonces,

$$(9) \quad \tilde{\mu}(X_n) = \omega_o(X_n)+\mu^*(X_n), \qquad n = 0,1,\ldots$$

como

$$\omega_o(X_n) = 0, \qquad n = 0,1,\ldots$$

y los X_n son cerrados, con $X_{n+1} \subset X_n$, de lo dicho anteriormente y de (8), se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(X_n) = 0.$$

Como consecuencia de 6), de la Definición 2 se obtiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = X_\infty$ es no vacío y compacto. Es claro que X_∞ es también convexo. Pero $F(X_\infty) \subset X_\infty$; entonces, del teorema de Schauder, F tiene un punto fijo que es una solución de nuestro problema.

Si $[0,T] \not\subset [0,1/A)$ entonces podemos repetir todo el razonamiento, puesto que $\{x(t)\} \in N(\mu)$ para $t \in [0,1/A)$. Después de un número de finito pasos obtendremos el resultado deseado. ▲

Nótese que usando las medidas definidas en el último párrafo podemos no solo afirmar que el problema (1) tiene solución sino también que $\{x(t)\} \in N(\mu)$ para $t \in [0,T]$. Conociendo el núcleo $N(\mu)$ podríamos afirmar mucho más sobre la naturaleza de estas soluciones.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Banaś, J., *Relatywne miary niezwartości w przestrzeniach Banacha*, Ph.D. Tesis (en polaco).

[2] Banaś, J., Goebel, K., *Measures of noncompactness in Banach spaces*, New York,

1980.

[3] Cellina, A., "On the existence of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces", Funk, Ekv. 14(1971), 129-136.

[4] Dacka , C., Goebel, K., *Pewne twierdzenia o jednoznacznoŝci roswiazania równania* $x' = f(t,x)$, Zeszyt Naukowo-Tech. WSI, Lublin, 1970, 51-55.

[5] Dieudonné, J., "Deux examples singuliérs d'équations différentieles, Acta Sci. Math. Szeged, 12(1950), 38-40.

[6] Goebel, K., Rzymowski, W., "An existence theorem for the equation $x' = f(t,x)$ in Banach spaces", Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys., 18(1970), 367-370.

[7] Godunov, A.N., "On the Peano theorem in Banach spaces", Funkc.Analiz, Priloz., 9 (1975), 56-60.

[8] Lasota, A., York, J., "The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach spaces, 13 (1974), 1-13.

[9] Pianigiani, G., "A density result for differential equations in Banach spaces, Bull.Acad.Polon.Sci.Sér. Math. Astronom. Phys., 26(1978).

[10] York, J., "A continuous differential equation in Hilbert space without existence", Kunck.Ekva., 13(1970), 19-21.

*

Uniwersytet Marii Curie-Sklodowskiej
Lublin, Polonia.

Profesora Visitante
Universidad Nacional de Colombia.

* *