Boletín de Matemáticas
Vol. XIX, Nº 1 (1985)

APORTES

LIMITE DIRECTO DE UN SISTEMA DIRECTO DE ESPACIOS METRICOS

Gilma R. de Villamarín

El objetivo del presente artículo es el de mostrar la completez de la Categoría de los Espacios Métricos presentando la construcción del Límite Directo de un Sistema Directo de Espacios Métricos según un conjunto dirigido.

Se ilustra esta situación en el caso de un Prehaz de espacios métricos, considerando como conjunto dirigido al conjunto de abiertos de un espacio topológico T.

§1. CATEGORIA DE ESPACIOS METRICOS.

Se considerará la Categoría C de los Espacios Métricos cuya colección de Objetos $Ob\,C$

es l de todos los espacios métricos $X, Y, Z, \ldots$ y donde, para cada par de objetos $X, Y \in Ob\, C$, los morfismos Hom(X,Y) son las aplicaciones contractivas entre los espacios métricos X,Y, o sea, las aplicaciones $f: X \to Y$ tales que $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$, para todo par de puntos $x, y \in X$. Por ley de composición de morfismos se considera la composición usual de funciones:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X,Y)\times \mathrm{Hom}(Y,Z) &\to \mathrm{Hom}(X,Z) \\ (f,g) &\to g\circ f \end{aligned}$$

La aplicación compuesta es contractiva pues para todo $x, y \in X$ se tiene que:

$$\begin{aligned} &d((g\circ f)(x), (g\circ f)(y)) \\ &= d(g(f(x)), g(f(y))) \leq d(f(x), f(y)) \leq d(x,y). \end{aligned}$$

El morfismo identidad es la aplicación idéntica.

§2. CONJUNTO PREORDENADO

2.1 *DEFINICION.* Un conjunto preordenado A, es un conjunto en el cual se ha definido una relación binaria $\leq$, reflexiva y transitiva.

Todo conjunto preordenado A, determina una categoría I, para la cual la colección de Obje tos $Ob\,I$ es el conjunto A, y para cada par de objetos $u,v \in Ob\,I$, $Hom(u,v) = \{\alpha\}$ donde el morfismo $\alpha : u \to v$ está determinado por la relación $u \leq v$ y $Hom(u,v) = \emptyset$ si $u \nleq v$. La composición de morfismos está determinada por la transitividad de la relación y el morfismo identidad por la reflexividad.

2.2 EJEMPLO: El conjunto τ de abiertos de un espacio topológico T es un conjunto preordenado con la relación: $u \leq v \Leftrightarrow u \subset v$, para $u,v \in \tau$.

La categoría I determinada por el conjunto preordenado τ está constituída por $Ob\ I = T$ y para $u,v \in T$ $Hom(u,v) = \{\alpha : u \to v\}$ si u y v son abiertos de T tales que $u \subset v$ y $Hom(u,v) = \emptyset$ si u y v son abiertos de T tales que $u \not\subset v$

§3. PREHAZ DE ESPACIOS METRICOS.

3.1 DEFINICION. Dado T espacio topológico, un prehaz de espacios métricos sobre T es un functor contravariante F entre la categoría I determinada por el conjunto de los abiertos de T y la categoría C de los espacios métricos, donde:

a) la aplicación $F: Ob\, I \to Ob\, C$ le hace correspon der a cada abierto U de T, un espacio métrico $F(U)$;

b) para cada par de abiertos U y V de T tales que $V \subset U$, se determina un morfismo de espacios métricos $\rho_V^U \in \mathrm{Hom}(F(U), F(V))$; es decir, ρ_V^U es una aplicación contractiva entre los espacios métricos $F(U)$ y $F(V)$, $\rho_V^U : F(U) \to F(V)$ llamada morfismo restricción tal que:

b1) para todo abierto U de T, $\rho_U^U = id_{F(U)}$

b2) dados U, V y W abiertos de T, si $W \subset V \subset U$, entonces $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$; es decir, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[rr, "\rho_W^U"] \arrow[dr, "\rho_V^U"'] & & F(W) \\
& F(V) \arrow[ur, "\rho_W^V"'] &
\end{tikzcd}$$

3.2 EJEMPLO. Dados T espacio topológico y G un espacio métrico cualquiera, se llama Prehaz Constante sobre T al prehaz $F: I \to C$ donde:

a) para cada abierto U de T, $F(U) = G$.

b) para cada par de abiertos U, V de T tales que $V \subset U$, $\rho_V^U = id_G$.

3.3 EJEMPLO. Sea T un espacio topológico cualquiera. El functor contravariante $F: I \to C$ definido a continuación es un ejemplo de un prehaz de espacios métricos sobre T,

a) Para cada abierto U de T, $F(U)$ es el espacio métrico $F(U) = \{f_U \mid f: T \to \mathbb{R}$ es continua y acotada$\}$ con la métrica $d(f_U, g_U) = \sup\{|f(s) - g(s)| : s \in U\}$.

Notación. Se nota f_U a la restricción de la aplicación f sobre el abierto U.

b) Para cada par de abiertos U, V de T tales que $V \subset U$, el morfismo restricción $\rho^U_V: F(U) \to F(V)$ es la función restricción $f_U \rightsquigarrow \rho^U_V(f_U) = f_V$.

La función ρ^U_V es un morfismo de espacios métricos pues: $d(\rho^U_V(f_U), \rho^U_V(g_U)) \leq d(f_U, g_U)$. En efecto, para $V \subset U$, se tiene que

$$d(f_V, g_V) = \sup\{|f(s) - g(s)| : s \in V\}$$
$$\leq \sup\{|f(s) - g(s)| : s \in U\} = d(f_U, g_U).$$

Se cumple además que

b1) para todo abierto U de T, $\rho^U_U = \mathrm{id}_{F(U)}$. En efecto $\rho^U_U(f_U) = f_U$,

b2) para U, V y W abiertos de T tales que $W \subset V \subset U$, el diagrama siguiente es conmutativo: $\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$.

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[rr, "\rho^{U}_{W}"] \arrow[ddr, "\rho^{U}_{V}"'] & & F(W) \\
s_U \arrow[rr, mapsto] \arrow[ddr, mapsto] & & s_W \\
& F(V) \arrow[uur, "\rho^{V}_{W}"'] & \\
& s_V \arrow[uur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

En efecto, $\rho^{U}_{W}(s_U) = s_W = \rho^{V}_{W}(\rho^{U}_{V}(s_U)) = \rho^{V}_{W}(s_V)$.

§4. CONJUNTO DIRIGIDO.

4.1 DEFINICION. Un conjunto dirigido A, es un conjunto preordenado con una relación binaria $\leqslant$, reflexiva y transitiva que satisface además la siguiente propiedad: para todo $\alpha, \beta \in A$, existe $\gamma \in A$ tal que $\alpha \leqslant \gamma$ y $\beta \leqslant \gamma$.

Notación. Se notará por A_1 el conjunto $A_1 = \{(\alpha,\beta) \in A \times A : \alpha \leqslant \beta\}$.

Como en el caso de un conjunto preordenado, un conjunto dirigido A determina una categoría I donde $Ob\, I$ es el conjunto A y para cada par de objetos $u,v \in Ob\, I$, $\mathrm{Hom}(u,v) = \{\alpha\}$ donde el morfismo $\alpha : u \to v$ está determinado por la relación $u \leqslant v$ y $\mathrm{Hom}(u,v) = \emptyset$, si $u \nleqslant v$. La composición de morfismos está determinada por la transitividad de la relación y el morfismo identidad por la reflexividad.

4.2 EJEMPLO. El conjunto τ de abiertos de un espacio topológico T es un conjunto dirigido con la relación: $U \leqslant V \Leftrightarrow V \subset U$, para $V, U \in \tau$. Además de tenerse las propiedades reflexiva y transitiva, se cumple que para U y V abiertos, $U \cap V$ es un conjunto abierto contenido tanto en U como en V.

4.3 EJEMPLO. Dado T espacio topológico y $t \in T$ elemento fijo de T, el conjunto $\mathbf{V}(T)$ de las vecindades abiertas de t es un conjunto dirigido con la misma relación anterior.

§5. SISTEMA DIRECTO DE ESPACIOS METRICOS.

5.1 DEFINICION. Un sistema directo de espacios métricos está constituído por una familia de espacios métricos $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ con subíndices en un conjunto dirigido A y una familia de morfismos de espacios métricos $(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in A_1}$, donde para cada $\alpha \leqslant \beta$, $\rho_{\alpha\beta} : X_\alpha \to X_\beta$ y donde se satisface además:

a) para todo $\alpha \in A$, $\rho_{\alpha\alpha} = id_{X_\alpha}$

b) para todo $\alpha, \beta, \gamma \in A$ con $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ se cumple que $\rho_{\alpha\gamma} = \rho_{\beta\gamma} \circ \rho_{\alpha\beta}$. Es decir, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[rr, "\rho_{\alpha\gamma}"] \arrow[dr, "\rho_{\alpha\beta}"'] & & X_\gamma \\
& X_\beta \arrow[ur, "\rho_{\beta\gamma}"'] &
\end{tikzcd}$$

Un sistema directo de espacios métricos es un functor covariante F entre una categoría I determinada por un conjunto dirigido A y la categoría C de los espacios métricos.

$$\begin{tikzcd}
F : Ob\, I \arrow[r] & Ob\, C \\
\alpha \arrow[loop left] \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & X_\alpha \arrow[loop right, "\rho_{\alpha\alpha} = id_{X_\alpha}"] \arrow[d, "\rho_{\alpha\beta}"] \arrow[dd, bend left=60, "\rho_{\alpha\gamma}"] \\
\beta \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & X_\beta \arrow[d, "\rho_{\beta\gamma}"] \\
\gamma \arrow[r, mapsto] & X_\gamma
\end{tikzcd}$$

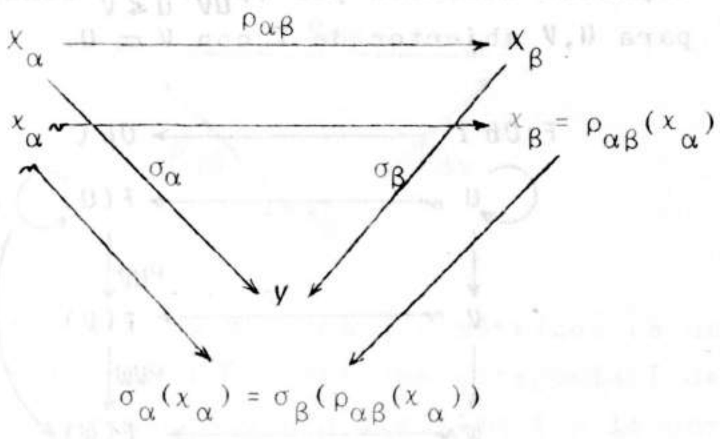
5.2 EJEMPLO. Dado T espacio topológico, un prehaz de espacios métricos sobre T determina el siguiente sistema directo de espacios métricos donde la familia de espacios métricos está dada por $(F(U))_{U \in T}$ y la familia de morfismos de espacios métricos por $(\rho_{UV})_{U \leqslant V}$ donde $\rho_{UV} = \rho^{U}_{V}$ para U, V abiertos de T con $V \subset U$.

$$
\begin{tikzcd}
F : \mathrm{Ob}\, I \arrow[rr] & & \mathrm{Ob}\, C \\
U \arrow[loop left] \arrow[rr, mapsto] \arrow[d] & & F(U) \arrow[loop right, "\rho_{UU} = id_{F(U)}"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\rho_{UW}"] \\
V \arrow[rr, mapsto] \arrow[d] & & F(V) \arrow[d, "\rho_{VW}"'] \\
W \arrow[rr, mapsto] & & F(W)
\end{tikzcd}
$$

5.3 EJEMPLO. Dado T espacio topológico y $t \in T$ un elemento fijo, un prehaz F de espacios métricos sobre T determina el siguiente sistema directo de espacios métricos: $(F(U))_{U \in \mathcal{V}(t)}$, y $(\rho_{UV})_{U \leqslant V}$ para $U, V \in \mathcal{V}(t)$.

§6. CONO INDUCTIVO DE UN SISTEMA DIRECTO DE ESPACIOS METRICOS.

6.1 DEFINICION. Un cono inductivo para un sistema directo de espacios métricos, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$, y, $(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in A_1}$, es un elemento de la categoría de espacios métricos, es decir, un espacio métrico Y junto con una colección de morfismos de espacios métricos $(\sigma_\alpha : X_\alpha \to Y)_{\alpha \in A}$ que satisfacen la siguiente condición de compatibilidad: para todo $\beta \in A$ tal que $\alpha \leqslant \beta$ $\sigma_\alpha = \sigma_\beta \circ \rho_{\alpha\beta}$. Es decir, el diagrama siguiente conmuta:



La condición de compatibilidad afirma que:

$$\forall_\beta,\ \alpha \leqslant \beta,\ \sigma_\alpha(x_\alpha) = \sigma_\beta(x_\beta)$$

En un cono Y, las imágenes de las restricciones por los morfismos se identifican.

§7. LIMITE DIRECTO DE UN SISTEMA DIRECTO DE ESPACIOS METRICOS.

7.1 DEFINICION. Un límite directo para un sistema directo de espacios métricos:

$$(X_\alpha)_{\alpha \in A} \quad \text{y} \quad (\sigma_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in A_1}$$

es un cono inductivo Z, $(\tau_\alpha : X_\alpha \to Z)_{\alpha \in A}$ que satisface la siguiente condición universal: para todo cono inductivo Y, $(\sigma_\alpha : X_\alpha \to Y)_{\alpha \in A}$ existe un único morfismo de espacios métricos $\phi : Z \to Y$ tal que para todo $\alpha \in A$, $\sigma_\alpha = \phi \circ \tau_\alpha$

Es decir, el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[rr, "\rho_{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "\tau_\alpha"] \arrow[ddr, "\sigma_\alpha"'] & & X_\beta \arrow[dl, "\tau_\beta"'] \arrow[ddl, "\sigma_\beta"] \\
& Z \arrow[d, dashed, "\phi"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Un límite directo es un cono inductivo "optimo".

7.2 EJEMPLO. Sea T un espacio topológico cualquiera y $t \in T$ un elemento fijo. Consideremos el siguiente sistema directo de espacios métricos:

$$(F(U))_{U \in \mathbf{V}(t)} \quad \text{y} \quad (\rho_{UV})_{U \leq V}$$

donde:

a) para cada U vecindad abierta de t, $F(U)$ es el espacio métrico $F(U) = \{f_U \mid f:T \to \mathbb{R}$ es continua y acotada$\}$ con la métrica:

$$d(f_U, g_U) = \sup\{|f(s)-g(s)| : s \in U\} .$$

b) para cada par de vecindades abiertas de t, $U, V \in \mathbf{V}(t)$ tales que $U \leqslant V$, $\rho_{UV}: F(U) \to F(V)$ es el morfismo restricción: $f_U \rightsquigarrow \rho_{UV}(f_U) = f_V$.

Para este sistema directo de espacios métricos, un límite directo lo constituye el espacio métrico $\mathbb{R}$ con la métrica usual, junto con los morfismos de espacios métricos $(\tau_U : F(U) \to \mathbb{R})_{U \in \mathbf{V}(t)}$ definidos por: $f_U \rightsquigarrow \tau_U(f_U) = f(t)$. Cada τ_U es un morfismo de espacios métricos, pues:

$$d(\tau_U(f_U), \tau_U(g_U)) = |f(t)-g(t)|$$
$$\leqslant \sup\{|f(s)-g(s)| : s \in U\} \leqslant d(f_U, g_U).$$

Se mostrará primero que $\mathbb{R}$, $(\tau_U)_{U \in \mathbf{V}(t)}$ es un cono inductivo, para este sistema directo de espacios métricos. Es decir, se demostrará que se satisface la condición de compatibilidad de que, para toda vecindad abierta $V \in \mathbf{V}(t)$ tal que $U \leqslant V$, $\tau_U = \tau_V \circ \rho_{UV}$. En efecto, dada $f_U \in F(U)$ se cumple que

$$\tau_U(f_U) = f(t) = \tau_V(\rho_{UV}(f_U)) = \tau_V(f_V).$$

Se verá enseguida que $\mathbb{R}$, $(\tau_U)_{U \in \mathcal{V}(t)}$ cumple también la condición universal, o sea, para todo cono inductivo E, $(\sigma_U : F(U) \to E)_{U \in \mathcal{V}(t)}$ del sistema directo de espacios métricos, existe un único morfismo $\phi : \mathbb{R} \to E$ de espacios métricos tal que para toda vecindad abierta de t, $U \in \mathcal{V}(t)$, $\sigma_U = \phi \circ \tau_U$. En efecto, dado $x \in \mathbb{R}$, sea $f_U \in F(U)$ tal que $x = f(t) = \tau_U(f_U)$. (Existe al menos la función constante $f(s) = x$, para todo $s \in U \in \mathcal{V}(t)$).

Entonces se define, $\phi : \mathbb{R} \to E$ de la manera siguiente: $\phi(x) = \phi(f(t)) = \sigma_U(f_U)$. Con esta definición, se tiene la conmutatividad del diagrama pues $\phi(\tau_U(f_U)) = \sigma_U(f_U)$ y de allí la unicidad de la función ϕ.

Veamos que ϕ está bien definida; es decir, que dadas $g_V \in F(V)$ donde $V \in \mathcal{V}(t)$ y $g : T \to \mathbb{R}$ otra función continua y acotada tal que $f(t) = x = g(t) = \tau_V(g_V)$, entonces $\sigma_U(f_U) = \sigma_V(g_V)$. Ahora bien, por la condición de compatibilidad para el cono inductivo E, $(\sigma_U : F(U) \to E)_{U \in \mathcal{V}(t)}$, se tiene que para toda vecindad abierta W de t, $W \in \mathcal{V}(t)$ tal que $W \subset U$ y $W \subset V$, $\sigma_U(f_U) = \sigma_W(f_W)$, y, $\sigma_V(g_V) = \sigma_W(g_W)$.

Por el diagrama siguiente,

$$\sigma_W(f_W) = \sigma_U(f_U), \quad \sigma_W(g_W) = \sigma_V(g_V).$$

$$\begin{tikzcd}
 & & F(V) \arrow[dl, "g_V"', "\tau_V"] \arrow[drr, "\rho_{VW}"] \arrow[dd, "\sigma_V"] & & \\
F(U) \arrow[rrrr, "\rho_{UW}"] \arrow[r, shift right, "f_U"'] \arrow[r, shift left, "\tau_U"] \arrow[drr, "\sigma_U"'] & \mathbb{R} \arrow[dr, dashed, "\phi"] & & & F(W) \arrow[lll, "\tau_W"'] \arrow[dll, "f_W, g_W"', "\sigma_W"] \\
 & & E & &
\end{tikzcd}$$

Luego: $d(\sigma_U(f_U),\sigma_V(g_V)) = d(\sigma_W(f_W),\sigma_W(g_W))$

$\leqslant d(f_W,g_W) = \sup\{|f(s)-g(s)| : s \in W\}$.

En virtud de la continuidad de f y g en t, dado $\varepsilon > 0$, existe una vecindad abierta W_o de t, $W_o \subset U \cap V$ tal que si $s \in W_o$ entonces

$$|f(s)-f(t)| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |g(s)- g(t)| < \varepsilon/2.$$

Luego

$$|f(s)-g(s)| \leqslant |f(s)-f(t)| + |f(t)-g(t)| + |g(t) -g(s)| \leqslant \varepsilon + |f(t)-g(t)|$$

y por lo tanto

$$d(f_{W_o},g_{W_o}) = \sup\{|f(s)-g(s)| : s \in W_o\} \leqslant$$

$\leq \varepsilon + |f(t) - g(t)|,$

con lo cual

$$d(\sigma_U(f_U), \sigma_V(g_V)) = d(\sigma_{W_o}(f_{W_o}), \sigma_{W_o}(g_{W_o}))$$

$$\leq d(f_{W_o}, g_{W_o}) \leq \varepsilon + |f(t) - g(t)|.$$

Puesto que $f(t) = x = g(t)$, entonces $d(\sigma_U(f_U), \sigma_V(g_V)) \leq \varepsilon$; y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $d(\sigma_U(f_U), \sigma_V(g_V)) = 0$, lo cual implica que $\sigma_U(f_U) = \sigma_V(g_V)$ como se quería demostrar.

Se demostrará ahora que $\phi: \mathbb{R} \to E$ es un morfismo de espacios métricos, es decir, que dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x = f(t) = \tau_U(f_U)$, $f_U \in F(U)$ y $y = g(t) = \tau_V(g_V)$, $g_V \in F(V)$, se tiene que: $d(\phi(f(t)), \phi(g(t))) \leq |f(t) - g(t)|$.

En efecto

$$d(\phi(f(t)), \phi(g(t))) = d(\phi(\tau_U(f_U)), \phi(\tau_V(g_V)))$$

$$= d(\sigma_U(f_U), \sigma_V(g_V)) = d(\sigma_W(f_W), \sigma_W(g_W))$$

$$\leq d(f_W, g_W)$$

para toda vecindad abierta W de t, tal que $W \subset U \cap V$.

Una vez más, por la continuidad de f y g en t, dado $\varepsilon > 0$, existe una vecindad abierta de t, $W_o \subset U \cap V$, tal que $d(f_{W_o}, g_{W_o}) \leq \varepsilon + |f(t) - g(t)|$, con lo cual

$$d(\phi(f(t)),\phi(g(t))) = d(\sigma_{W_0}(f_{W_0}),\sigma_{W_0}(g_{W_0}))$$

$$\leq d(f_{W_0},g_{W_0}) \leq \varepsilon + |f(t)-g(t)|.$$

Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, $d(\phi(f(t)),\phi(g(t))) \leq |f(t)-g(t)|$, con lo cual queda demostrado que $\mathbb{R}$, $(\tau_U)_{U\in\mathcal{V}(t)}$ es un límite directo para el sistema directo de espacios métricos dado.

7.3 ***PROPOSICION.*** Dos límites directos $Z,(\tau_\alpha)_{\alpha\in A}$, y, $Z',(\tau'_\alpha)_{\alpha\in A}$ de un sistema directo de espacios métricos son naturalmente isomorfos, es decir, existe entre ellos un morfismo biyectivo de espacios métricos compatible con los morfismos τ_α y τ'_α.

Demostración. Por la condición universal para el límite directo Z, y siendo Z' cono inductivo, existe un único morfismo de espacios métricos $\phi: Z \to Z'$ tal que para todo $\alpha \in A$, $\tau'_\alpha = \phi\circ\tau_\alpha$

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[dr, "\tau'_\alpha"'] & Z \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & Z' \end{tikzcd}$$

Por la condición universal para el límite directo Z', siendo Z cono inductivo, existe un único morfismo de espacios métricos $\psi: Z' \to Z$ tal que para todo $\alpha \in A$, $\tau_\alpha = \psi \circ \tau'_\alpha$

$$\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
X_\alpha \arrow[ur, "\tau'_\alpha"] \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[dr, "\tau'_\alpha"'] & Z \arrow[d, dashed, "\phi"] \\
 & Z'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, dashed, "\phi"] \\
X_\alpha \arrow[ur, "\tau_\alpha"] \arrow[r, "\tau'_\alpha"] \arrow[dr, "\tau_\alpha"'] & Z' \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

De lo anterior se deduce que $\tau'_\alpha = (\phi \circ \psi) \circ \tau'_\alpha$ y $\tau_\alpha = (\psi \circ \phi) \circ \tau_\alpha$. Por otro lado, la condición de universalidad para Z y Z' tomados en su ca<u>lidad</u> de límite directo y de cono inductivo implica que $id_Z: Z \to Z$, y, $id_{Z'}: Z' \to Z'$ son los únicos morfismos tales que para todo $\alpha \in A$, $\tau_\alpha = id_Z \circ \tau_\alpha$, y, $\tau_{\alpha'} = id_{Z'} \circ \tau'_\alpha$ es decir, los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{tikzcd}
 & Z' \arrow[dd, dashed, "id_{Z'}"] \\
X_\alpha \arrow[ur, "\tau_\alpha"] \arrow[dr, "\tau'_\alpha"'] & \\
 & Z'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dd, dashed, "id_Z"] \\
X_\alpha \arrow[ur, "\tau_\alpha"] \arrow[dr, "\tau_\alpha"'] & \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

Luego, $\phi\circ\psi = id_Z$, y $\psi\circ\phi = id_Z$.

7.4 ***NOTA***. La anterior proposición da una justificación para hablar del límite directo de un sistema directo de espacios métricos: $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A_1}$ y notarlo:

$$\lim\{(X_\alpha)_{\alpha\in A},(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A_1}\} \cong [Z,(\tau_\alpha)_{\alpha\in A}].$$

§8. CONSTRUCCION DEL LIMITE DIRECTO DE UN SISTEMA DIRECTO DE ESPACIOS METRICOS.

Dado un sistema directo de espacios métricos $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A_1}$, se puede ahora construír un límite directo para el sistema.

8.1 ***DEFINICION***. Sea $X = \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ la unión disyunta de todos los espacios métricos X_α. Sobre X se define la relación $\sim$ como sigue:
$u \sim v$ si para cada $\varepsilon > 0$, si $u\in X_\alpha$ y $v\in X_\beta$, existe $\gamma\in A$ tal que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ y $d(\rho_{\alpha\gamma}(u),\rho_{\beta\gamma}(v)) < \varepsilon$.

8.2 ***LEMA***. La relación $\sim$ define una relación de equivalencia en el conjunto $X = \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Demostración. Veamos que la relación $\sim$ satisface las propiedades:

i) Reflexiva: Para todo $u \subset X$, $u \sim u$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, $d(\rho_{\alpha\alpha}(u),\rho_{\alpha\alpha}(u)) = d(u,u) = 0 < \varepsilon$. En efecto

ii) Simétrica: Para todo $u,v \in X$, $u \sim v \Rightarrow v \sim u$.

En efecto, si $u \sim v$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, si $u \in X_\alpha$ y $v \in X_\beta$, existe $\gamma \in A$ tal que $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$, y $d(\rho_{\alpha\gamma}(u),\rho_{\beta\gamma}(v)) = d(\rho_{\beta\gamma}(v),\rho_{\alpha\gamma}(u)) < \varepsilon$, lo cual significa que $v \sim u$.

iii) Transitiva: Para todo $u,v,w \in X$, $u \sim v$, $\wedge$, $v \sim w \Rightarrow u \sim w$.

En efecto, si $u \sim v$, y, $v \sim w$, $u \in X_\alpha$, $v \in X_\beta$, $w \in X_\gamma$, entonces existe δ tal que $\alpha \leqslant \delta$, $\beta \leqslant \delta$, y, $d(\rho_{\alpha\delta}(u),\rho_{\beta\delta}(v)) < \varepsilon/2$ y existe δ', tal que $\beta \leqslant \delta'$, $\gamma \leqslant \delta'$, y, $d(\rho_{\beta\delta'}(v),\rho_{\gamma\delta'}(w)) < \varepsilon/2$

$$
\begin{tikzcd}
u \in X_\alpha \arrow[dr, "\rho_{\alpha\delta}"] \arrow[ddrr, bend left, "\rho_{\alpha\xi}"] & & \\
& X_\delta \arrow[dr, "\rho_{\delta\xi}"] & \\
v \in X_\beta \arrow[ur, "\rho_{\beta\delta}"] \arrow[rr, "\rho_{\beta\xi}"] \arrow[dr, "\rho_{\beta\delta'}"'] & & X_\xi \\
& X_{\delta'} \arrow[ur, "\rho_{\delta'\xi}"] & \\
w \in X_\gamma \arrow[ur, "\rho_{\gamma\delta'}"] \arrow[uurr, bend right, "\rho_{\gamma\xi}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Sea ξ tal que $\delta \leqslant \xi$ y $\delta' \leqslant \xi$, entonces: $\alpha \leqslant \xi$, y, $\gamma \leqslant \xi$, veamos que:

$$d(\rho_{\alpha\xi}(u),\rho_{\gamma\xi}(w)) < \varepsilon.$$

En efecto:

$$d(\rho_{\alpha\xi}(u),\rho_{\gamma\xi}(w)) \leqslant d(\rho_{\alpha\xi}(u),\rho_{\beta\xi}(v)) + d(\rho_{\beta\xi}(v),\rho_{\gamma\xi}(w)).$$

Teniendo en cuenta que $\alpha \leqslant \delta \leqslant \xi$, y, $\beta \leqslant \delta \leqslant \xi$, y por tanto que $\rho_{\alpha\xi} = \rho_{\delta\xi}\circ\rho_{\alpha\delta}$, y, $\rho_{\beta\xi} = \rho_{\delta\xi}\circ\rho_{\beta\delta}$, se tiene

$$d(\rho_{\alpha\xi}(u),\rho_{\beta\xi}(v)) = d(\rho_{\delta\xi}(\rho_{\alpha\delta}(u)),$$

$$\rho_{\delta\xi}(\rho_{\beta\delta}(v))) \leqslant d(\rho_{\alpha\delta}(u),\rho_{\beta\delta}(v)) < \varepsilon/2.$$

Así mismo, puesto que: $\beta \leqslant \delta' \leqslant \xi$, y, $\gamma \leqslant \delta' \leqslant \xi$, se tiene

$$\rho_{\beta\xi} = \rho_{\delta'\xi}\circ\rho_{\beta\delta'}, \quad y, \quad \rho_{\gamma\xi} = \rho_{\delta'\xi}\circ\rho_{\gamma\delta'},$$

con lo cual

$$d(\rho_{\beta\xi}(v),\rho_{\gamma\xi}(w)) = d(\rho_{\delta'\xi}(\rho_{\beta\delta'}(v)),\rho_{\delta'\xi}$$

$$(\rho_{\gamma\delta'}(w))) \leqslant d(\rho_{\beta\delta'}(v),\rho_{\gamma\delta'}(w)) < \varepsilon/2.$$

Finalmente, $d(\rho_{\alpha\xi}(u),\rho_{\gamma\xi}(w)) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

8.3. LEMA. Sea $Z = X/\sim\, = \{[u_\alpha] : \alpha \in A\}$. La siguiente correspondencia define una función d de $Z\times Z$ en $\mathbb{R}$:

$$d\colon Z\times Z \to \mathbb{R}$$
$$([u_\alpha],[v_\beta]) \rightsquigarrow d([u_\alpha],[v_\beta]) = \inf_{\substack{\alpha\leq\gamma\\ \beta\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))]$$

Demostración. La correspondencia d es una función, si se puede garantizar la unicidad de la imagen, es decir, si d es independiente de los representantes escogidos.

Dados $u'_{\alpha'}, v'_{\beta'} \in X$ tales que $u'_{\alpha'} \sim u_\alpha$ y $v'_{\beta'} \sim v_\beta$ se mostrará que:

$$\inf_{\substack{\alpha'\leq\gamma\\ \beta'\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha'\gamma}(u'_{\alpha'}),\rho_{\beta'\gamma}(v'_{\beta'}))] = \inf_{\substack{\alpha\leq\gamma\\ \beta\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))].$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\gamma_\varepsilon \in A$, $\alpha \leq \gamma_\varepsilon$ y $\beta \leq \gamma_\varepsilon$ tal que:

$$d(\rho_{\alpha\gamma_\varepsilon}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma_\varepsilon}(v_\beta)) < \inf_{\substack{\alpha\leq\gamma\\ \beta\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))]+\varepsilon$$

Para γ, $\gamma_\varepsilon \leq \gamma$ se cumple que $\alpha \leq \gamma_\varepsilon \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma_\varepsilon \leq \gamma$.

Entonces, teniendo en cuenta que $\rho_{\alpha\gamma} = \rho_{\gamma_\varepsilon\gamma}\circ\rho_{\alpha\gamma_\varepsilon}$, y, $\rho_{\beta\gamma} = \rho_{\gamma_\varepsilon\gamma}\circ\rho_{\beta\gamma_\varepsilon}$, se tiene

$$d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) = d(\rho_{\gamma_\varepsilon\gamma}(\rho_{\alpha\gamma_\varepsilon}(u_\alpha)),\rho_{\gamma_\varepsilon\gamma}(\rho_{\beta\gamma_\varepsilon}(v_\beta)))$$

$$\leqslant d(\rho_{\alpha\gamma_\varepsilon}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma_\varepsilon}(v_\beta)) < \inf_{\substack{\alpha\leqslant\gamma\\ \beta\leqslant\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))] + \varepsilon$$

Por otra parte, puesto que $u'_{\alpha'} \sim u_\alpha$ y $v'_{\beta'} \sim v_\beta$, para $\varepsilon > 0$ existen $\gamma_1 \in A$ y $\gamma_2 \in A$, con $\alpha' \leqslant \gamma_1$, $\alpha \leqslant \gamma_1$, $\beta' \leqslant \gamma_2$, $\beta \leqslant \gamma_2$ tales que:

$$d(\rho_{\alpha'\gamma_1}(u'_{\alpha'}),\rho_{\alpha\gamma_1}(u_\alpha)) < \varepsilon, \quad y,$$

$$d(\rho_{\beta'\gamma_2}(v'_{\beta'}),\rho_{\beta\gamma_2}(v_\beta)) < \varepsilon.$$

Consideremos $\gamma_o \in A$ tal que $\gamma_\varepsilon \leqslant \gamma_o$, $\gamma_1 \leqslant \gamma_o$, $\gamma_2 \leqslant \gamma_o$. Por lo tanto, para todo $\gamma \geqslant \gamma_o$ se cumple que

$$d(\rho_{\alpha'\gamma}(u'_{\alpha'}),\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)) < \varepsilon \quad y,$$

$$d(\rho_{\beta'\gamma}(v'_{\beta'}),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) < \varepsilon.$$

Por otra parte, para $\gamma \geqslant \gamma_o$ también se cumple que

$$d(\rho_{\alpha'\gamma}(u'_{\alpha'}),\rho_{\beta'\gamma}(v'_{\beta'})) \leqslant d(\rho_{\alpha'\gamma}(u'_{\alpha'}),$$

$$\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)) + d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) + d(\rho_{\beta\gamma}(v_\beta),$$

$$\rho_{\beta'\gamma}(v'_{\beta'})) < 2\varepsilon + d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) < 3\varepsilon$$

$$+ \inf_{\substack{\alpha\leqslant\gamma\\ \beta<\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))].$$

Luego:

$$\inf_{\substack{\alpha' \leq \gamma \\ \beta' \leq \gamma}} [d(\rho_{\alpha'\gamma}(u'_{\alpha'}),\rho_{\beta'\gamma}(v'_{\beta'}))] \leq 3\varepsilon + \inf_{\substack{\alpha \leq \gamma \\ \beta \leq \gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha), \rho_{\beta\gamma}(v_\beta))].$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es cualquiera, entonces:

$$\inf_{\substack{\alpha' \leq \gamma \\ \beta' \leq \gamma}} [d(\rho_{\alpha'\gamma}(u'_{\alpha'}),\rho_{\beta'\gamma}(v'_{\beta'}))] \leq \inf_{\substack{\alpha \leq \gamma \\ \beta \leq \gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha), \rho_{\beta\gamma}(v_\beta))]$$

De manera similar se demuestra la otra desigualdad

$$\inf_{\substack{\alpha \leq \gamma \\ \beta \leq \gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))] \leq \inf_{\substack{\alpha' \leq \gamma \\ \beta' \leq \gamma}} [d(\rho_{\alpha'\gamma}(u'_{\alpha'}), \rho_{\beta'\gamma}(v'_{\beta'}))].$$

Por lo tanto, d está bien definida, en consecuencia de la igualdad

$$\inf_{\substack{\alpha \leq \gamma \\ \beta \leq \gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))] = \inf_{\substack{\alpha' \leq \gamma \\ \beta' \leq \gamma}} [d(\rho_{\alpha'\gamma}(u'_{\alpha'}), \rho_{\beta'\gamma}(v'_{\beta'}))]$$

8.4 LEMA. Dado $Z = X/\sim = \{[u_\alpha] : \alpha \in A\}$, la función $d: Z \times Z \to \mathbb{R}$ definida por

$$d([u_\alpha],[v_\beta]) = \inf_{\substack{\alpha \leq \gamma \\ \beta \leq \gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))]$$

es una métrica sobre Z.

Demostración. i) Evidentemente $d([u_\alpha],[v_\beta]) \geq 0$

ii) $d([u_\alpha],[v_\beta]) = 0 \Rightarrow [u_\alpha] = [v_\beta]$.

En efecto, si

$$d([u_\alpha],[v_\beta]) = \inf_{\substack{\alpha\leq\gamma\\ \beta\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))] = 0,$$

entonces dado $\varepsilon > 0$, existe γ, $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$ tal que $d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) < \varepsilon$, lo cual significa que $u_\alpha \sim v_\beta$, o sea $[u_\alpha] = [v_\beta]$.

iii) $[u_\alpha] = [v_\beta] \Rightarrow d([u_\alpha],[v_\beta]) = 0$.

En efecto, si $[u_\alpha] = [v_\beta]$ entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe γ, $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$ tal que

$$d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) < \varepsilon.$$

Luego

$$\inf_{\substack{\alpha\leq\gamma\\ \beta\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))] < \varepsilon ,$$

para todo $\varepsilon > 0$, lo cual implica que

$$\inf_{\substack{\alpha\leq\gamma\\ \beta\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))] = 0.$$

En conclusión $d([u_\alpha],[v_\beta]) = 0$.

iv) $d([u_\alpha],[v_\beta]) = d([v_\beta],[u_\alpha])$.

En efecto $d([u_\alpha],[v_\beta]) = \inf_{\substack{\alpha\leq\gamma\\ \beta\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))] =$

$$= \inf_{\substack{\alpha\leq\gamma \\ \beta\leq\gamma}} [d(\rho_{\beta\gamma}(v_\beta),\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha))] = d([v_\beta],[u_\alpha])$$

v) $d([u_\alpha],[w_\xi]) \leq d([u_\alpha],[v_\beta])+d([v_\beta],[w_\xi])$.

Demostrar la anterior propiedad es equivalente a mostrar que:

$$\inf_{\substack{\alpha\leq\gamma \\ \xi\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\xi\gamma}(w_\xi))] \leq \inf_{\substack{\alpha\leq\gamma' \\ \beta\leq\gamma'}} [d(\rho_{\alpha\gamma'}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma'}(v_\beta))]$$

$$+ \inf_{\substack{\beta\leq\gamma'' \\ \xi\leq\gamma''}} [d(\rho_{\beta\gamma''}(v_\beta),\rho_{\xi\gamma''}(w_\xi))].$$

Para todo γ', $\alpha \leq \gamma'$ y $\beta \leq \gamma'$ y todo γ'', $\beta \leq \gamma''$ y $\xi \leq \gamma''$ existe $\gamma \in A$, $\gamma' \leq \gamma$ y $\gamma'' \leq \gamma$ tal que

$$d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) \leq d(\rho_{\alpha\gamma'}(u_\alpha), \rho_{\beta\gamma'}(v_\beta)),$$

y,

$$d(\rho_{\beta\gamma}(v_\beta),\rho_{\xi\gamma}(w_\xi)) \leq d(\rho_{\beta\gamma''}(v_\beta),\rho_{\xi\gamma''}(w_\xi)).$$

Entonces

$$\inf_{\substack{\alpha\leq\gamma \\ \beta\leq\gamma}} [d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\xi\gamma}(w_\xi))] \leq d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\xi\gamma}(w_\xi))$$

$$\leq d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) + d(\rho_{\beta\gamma}(v_\beta),\rho_{\xi\gamma}(w_\xi))$$

$$\leq d(\rho_{\alpha\gamma'}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma'}(v_\beta)) + d(\rho_{\beta\gamma''}(v_\beta),\rho_{\xi\gamma''}(w_\xi)),$$

y esto es cierto para todo γ', $\alpha \leq \gamma'$ y $\beta \leq \gamma'$, y para todo γ'', $\beta \leq \gamma''$ y $\xi \leq \gamma''$. Luego

$$\inf_{\substack{\alpha\leq\gamma\\ \xi\leq\gamma}}\left[d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\xi\gamma}(w_\xi))\right]$$

$$\leq \inf_{\substack{\alpha\leq\gamma',\beta\leq\gamma'\\ \beta\leq\gamma'',\xi\leq\gamma''}}\left[d(\rho_{\alpha\gamma'}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma'}(v_\beta))+d(\rho_{\beta\gamma''}(v_\beta),\rho_{\xi\gamma''}(w_\xi))\right]$$

$$\leq \inf_{\substack{\alpha\leq\gamma'\\ \beta\leq\gamma'}}\left[d(\rho_{\alpha\gamma'}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma'}(v_\beta))\right]+\inf_{\substack{\beta\leq\gamma''\\ \xi\leq\gamma''}}\left[d(\rho_{\beta\gamma''}(v_\beta),\rho_{\xi\gamma''}(w_\xi))\right]$$

8.5. LEMA. Sea $Z = X/\sim = \{[u_\alpha]: \alpha\in A\}$. Para todo $\alpha \in A$, la función $\tau_\alpha : X_\alpha \to Z$ definida por $u_\alpha \rightsquigarrow \tau_\alpha(u_\alpha) = [u_\alpha]$ es un morfismo de espacios métricos.

Demostración. Se mostrará que para todo u_α, $v_\alpha \in X_\alpha$ se cumple que:

$$d(\tau_\alpha(u_\alpha),\tau_\alpha(v_\alpha)) \leq d(u_\alpha,v_\alpha).$$

En efecto:

$$d(\tau_\alpha(u_\alpha),\tau_\alpha(v_\alpha)) = d([u_\alpha],[v_\alpha])$$

$$= \inf_{\alpha\leq\gamma}\left[d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\alpha\gamma}(v_\alpha))\right] \leq d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\alpha\gamma}(v_\alpha))$$

$$\leq d(u_\alpha,v_\alpha).$$

8.6. LEMA. El espacio métrico $Z = X/\sim = \{[u] : \alpha \in A\}$ junto con los morfismos $(\tau_\alpha : X_\alpha \to Z)_{\alpha \in A}$ es un cono inductivo para el sistema directo de espacios métricos:

$$(X_\alpha)_{\alpha \in A},\ (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in A_1}.$$

Demostración. Se mostrará que Z, $(\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ satisface la condición de compatiblidad: para todo $\beta \in A$, tal que $\alpha \leqslant \beta$, $\tau_\alpha = \tau_\beta \circ \rho_{\alpha\beta}$; o sea, $\tau_\alpha(u_\alpha) = \tau_\beta(\rho_{\alpha\beta}(u_\alpha)) = \tau_\beta(u_\beta)$ para todo $u_\alpha \in X_\alpha$. Esto equivale a demostrar que para todo $\beta \in A$, $\alpha \leqslant \beta$, se cumple que $[u_\alpha] = [u_\beta]$ donde $u_\beta = \rho_{\alpha\beta}(u_\alpha)$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ para $\gamma = \beta$ se cumple que

$\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$, y, $d(\rho_{\alpha\beta}(u_\alpha), \rho_{\beta\beta}(u_\beta)) = d(u_\beta, u_\beta) = 0 < \varepsilon$

8.7. LEMA. El espacio métrico $Z = X/\sim = \{[u_\alpha] : \alpha \in A\}$ junto con los morfismos $(\tau_\alpha : X_\alpha \to Z)_{\alpha \in A}$ es un límite directo para el sistema directo de espacios métricos:

$$(X_\alpha)_{\alpha \in A},\ (\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in A_1}$$

Demostración. Se mostrará que Z, $(\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ satisface la condición universal: para todo cono inductivo Y, $(\sigma_\alpha : X_\alpha \to Y)_{\alpha \in A}$ del sistema directo de espacios métricos, existe un único morfismo $\phi: Z \to Y$ de espacios métricos tal que para todo $\alpha \in A$, $\sigma_\alpha = \phi \circ \tau_\alpha$.

En efecto, dado $u \in Z = X/\sim = \{[u_\alpha]: \alpha \in A\}$, sea $u_\alpha \in X_\alpha$ tal que

$$u = [u_\alpha] = \tau_\alpha(u_\alpha).$$

Se define $\phi: Z \to Y$ de la manera siguiente:

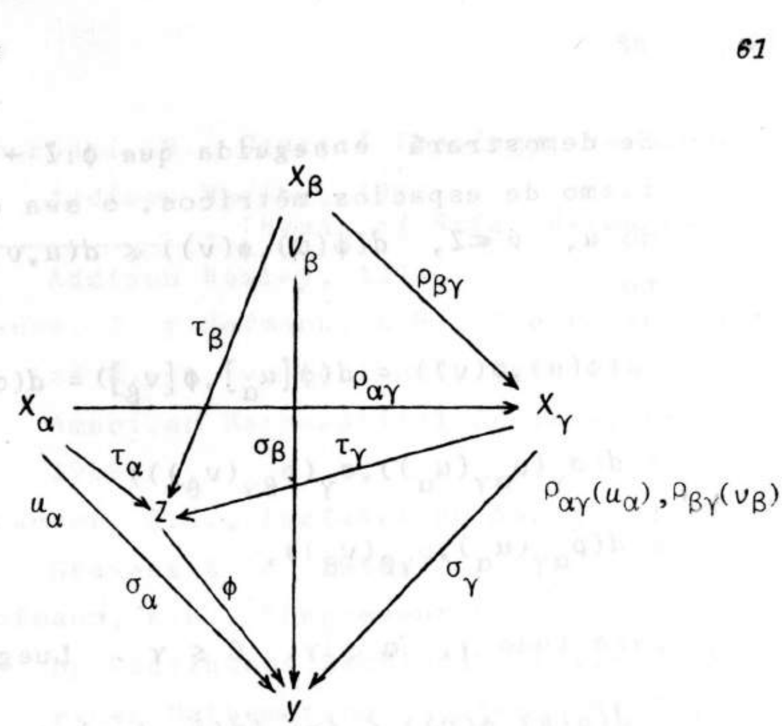
$$\phi(u) = \phi([u_\alpha]) = \sigma_\alpha(u_\alpha),$$

con lo cual se cumple que $\phi(\tau_\alpha(u_\alpha)) = \sigma_\alpha(u_\alpha)$ y se tiene por lo tanto la unicidad de la función ϕ.

Veamos que ϕ está bien definida, es decir, que si $v_\beta \in X_\beta$ es otro representante de la clase de equivalencia $u = [v_\beta] = \tau_\beta(v_\beta)$, entonces $\sigma_\alpha(u_\alpha) = \sigma_\beta(v_\beta)$.

En efecto, si $[u_\alpha] = u = [v_\beta]$ entonces $u_\alpha \sim v_\beta$ lo cual significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe γ, $\alpha \leqslant \gamma$ y, $\beta \leqslant \gamma$ tal que

$$d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha), \rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) < \varepsilon.$$



$$u = [u_\alpha] = [v_\beta]$$

Teniendo en cuenta la condición de compatibilidad para el cono inductivo Y se tiene que:

$$d(\sigma_\alpha(u_\alpha),\sigma_\beta(v_\beta)) = d(\sigma_\gamma(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)),$$

$$\sigma_\gamma(\rho_{\beta\gamma}(v_\beta))) \leqslant d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) < \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Luego $d(\sigma_\alpha(u_\alpha),\sigma_\beta(v_\beta)) = 0$ y por lo tanto $\sigma_\alpha(u_\alpha) = \sigma_\beta(v_\beta)$ lo cual demuestra que ϕ está bien definida.

Se demostrará enseguida que $\phi: Z \to Y$ es un morfismo de espacios métricos, o sea que para todo u, $v \in Z$, $d(\phi(u),\phi(v)) \leqslant d(u,v)$. En efecto:

$$d(\phi(u),\phi(v)) = d(\phi[u_\alpha],\phi[v_\beta]) = d(\sigma_\alpha(u_\alpha),\sigma_\beta(v_\beta))$$

$$= d(\sigma_\gamma(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)),\sigma_\gamma(\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)))$$

$$\leqslant d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\gamma\beta}(v_\beta)),$$

para todo γ, $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$. Luego

$$d(\phi(u),\phi(v)) \leqslant \inf_{\substack{\alpha\leqslant\gamma \\ \beta\leqslant\gamma}} (d(\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha),\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)) = d(u,v).$$

Se ha demostrado el siguiente teorema.

8.8. TEOREMA. Todo sistema directo de espacios métricos tiene un límite directo.

Demostracion. Dado un sistema directo de espacios métricos $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$, $(\rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in A_1}$, el cono inductivo Z, $(\tau_\alpha)_{\alpha\in A}$ de la construcción es un límite directo del sistema.

* *

BIBLIOGRAFIA

[1] Bourgin, D.G., *Modern Algebraic Topology*, Mac Millan, 19

[2] Bourbaki, N., *General Topology*, Hermann-Addison Wesley, 1968.

[3] ____________., *Theory of Sets*, Hermann-Addison Wesley, 1974.

[4] Dauns, J. y Hofmann, K.H., "Representations of Rings by Sections", Memoirs of the American Mathematical Society, Nº 83. 1968.

[5] Dowcker, C.H., *Lectures on Sheaf Theory*, Stevens & Co. 1956.

[6] Hofmann, K.H., "Representations of Algebras by Continuous Sections", Bulletin American Mathematical Society, Nº 78, pp.291-373, 1972.

[7] ____________., *Sheaves and Bundles of Banach Spaces*, Tulane University, preprint, 1975.

[8] Hofmann, K.H. y Keimel Klaus, "Sheaf Theoretical Concepts in Analysis: Bundles and Sheaves of Banach Spaces, Banach C(X)-Modules", Lecture Notes in Mathematics, Nº 753, Applications of Sheaves. Proceedings, Durham, Springer-Verlag, 1977.

[9] Schwartz, Laurent, *Analyse. Deuxième Partie.* Topologie Générale et analyse fonctionelle, Hermann, 1970.

[10] Tennison, B.R., *Sheaf Theory*, London Mathematical Society, Note Series 20.

[11] Varela, J., "Sobre la existencia de Campos Uniformes". Scientiae, Vol. 1 Nº 1, pp. 53-62. 1979.

[12] ———., "Existencia de Campos Uniformes" Primer Simposium de Análisis Funcional, Medellín, 1981.

* *