Boletín de Matemáticas
Vol. XIX, Nº 1, (1985)

EXTENSION DE LA CONSTRUCCION "ESTRELLA"

Liliana Blanco - Carlos Ruíz

INTRODUCCION.

En la construcción de los números reales no-estándar se acostumbra a utilizar el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, junto con un ultrafiltro $\mathcal{U}$ más fino que el filtro de complementarios finitos, y el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. En este artículo nos proponemos extender la construcción a un conjunto cualquiera X, que reemplaza a $\mathbb{R}$, usando conjuntos filtrados arbitrarios $(A,\mathcal{F}_A)$, que reemplazan a $(\mathbb{N},\mathcal{U})$, y ver bajo qué condiciones, sobre el conjunto filtrado utilizado en la construcción, se preservan las posibles estructuras algebraicas y de orden que tenga el conjunto original X.

Aunque el tema de este artículo no sea algo novedoso, es básico en el trabajo de investigación que venimos adelantando y del que esperamos poder publicar algunos resultados posteriormente.

Sean $(A,\mathcal{F}_A)$ un conjunto filtrado, esto es un conjunto vacío A junto con un filtro $\mathcal{F}_A$ definido sobre el, y X un conjunto cualquiera. En el conjunto Conj(A,X) de todas las funciones de A en X definimos la relación de equivalencia "$\sim$" como sigue:

DEFINICION. Sean $\sigma, \mu \in$ Conj(A,X) decimos que $\sigma \sim \mu$ si y sólo si

$$\{a \in A/\sigma(a) = \mu(a)\} \in \mathcal{F}_A^{(1)}$$

El conjunto X^* de todas las clases de equivalencia determinadas por la relación "$\sim$" se llama "el conjunto estrella de X" ó simplemente "el estrella de X".

Es fácil ver que el conjunto filtrado $(A,\mathcal{F}_A)$ determina un functor covariante $\tilde{\mathcal{F}}_A$ de la categoría Conj en sí mismo. En efecto

$$\tilde{\mathcal{F}}_A : \text{Conj} \rightarrow \text{Conj}$$
$$X \rightsquigarrow \text{Conj}(A,X)_{/\sim} = X^*$$

Además, si $f:X \rightarrow Y$ es una función, entonces

(1) $\sigma \sim \mu$ es equivalente a decir que $\sigma \times \mu$ es un morfismo de conjuntos filtrados, donde
$\sigma\times\mu : A \rightarrow X\times X$, $(\sigma\times\mu)(a) = (\sigma(a),\mu(a))$.

$$\tilde{\mathcal{F}}_A(f): X^* \longrightarrow Y^*$$
$$[\sigma] \rightsquigarrow [f\circ\sigma]$$

Por lo tanto, tiene sentido considerar el functor contravariante

$$\mathbf{Fil}: \to \mathbf{Func}(\mathrm{Conj},\ \mathrm{Conj})$$
$$(A, \mathcal{F}_A) \to \tilde{\mathcal{F}}_A$$

donde **Fil** es la categoría de todos los conjuntos filtrados (las flechas en este caso son los morfismos de conjuntos filtrados) y **Func** (Conj, Conj) es la categoría de todos los functores covariantes de Conj en Conj (aquí las flechas son las aplicaciones naturales sobre functores).

Analicemos más detenidamente el functor $\tilde{\mathcal{F}}_A$ determinado por el conjunto filtrado $(A, \mathcal{F}_A)$. En primer lugar, se puede ver que $\tilde{\mathcal{F}}_A$ conmuta para productos finitos, esto es:

$$\tilde{\mathcal{F}}_A(B_1\times B_2\times\ldots\times B_n) = \tilde{\mathcal{F}}_A(B_1)\times\tilde{\mathcal{F}}_A(B_2)\times\ldots\times\tilde{\mathcal{F}}_A(B_n).$$

En segundo lugar, observamos que si G es un grupo entonces $G^* = \tilde{\mathcal{F}}_A(G)$ también es un grupo. En efecto, si la operación definida en G es "$\cdot$" y el elemento neutro e, podemos considerar la siguiente operación definida en G^*:

$$\boxtimes: G^*\times G^* \longrightarrow G^*$$
$$([\sigma], [\mu]) \rightsquigarrow [\sigma\cdot\mu]$$

donde

$$\sigma\cdot\mu : A \rightarrow G$$
$$a \rightsquigarrow \sigma(a)\cdot\mu(a).$$

$(G^*,\boxtimes)$ es un grupo, cuyo elemento neutro es $e^* = [\tilde{e}]$ donde $\tilde{e}: A \rightarrow G.$
$a \rightsquigarrow e$

Además si G es abeliano, G^* también lo es.

No es difícil probar que $\tilde{\mathcal{F}}_A$ preserva la estructura de anillo con unidad; es decir, se puede ver que si R es un anillo con unidad $\tilde{\mathcal{F}}_A(R) = R^*$ también lo es. Sin embargo, si K es un cuerpo, $\tilde{\mathcal{F}}_A(K)$ no siempre es un cuerpo. Por ejemplo, si $K = \mathbb{Z}_2$ y $\mathcal{F}_p$ es el filtro sobre $\mathbb{N}$ generado por el conjunto P de números pares, se tiene que

$$\mathbb{Z}_2^* = \tilde{\mathcal{F}}_p(\mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Conj}(P,\mathbb{Z}_2) = \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Por consiguiente, es natural preguntar bajo qué condiciones se tendrá que si K es un cuerpo, $K^* = \tilde{\mathcal{F}}_A(K)$ es un cuerpo. El siguiente teorema da la respuesta a esta pregunta.

TEOREMA. Sea $(A,\mathcal{F}_A)$ un conjunto filtrado $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro si y sólo si para todo $(K,+,\cdot)$ un cuerpo, $K^* = \tilde{\mathcal{F}}_A(K)$ es un cuerpo.

Demostración. i) Supongamos que $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro y veamos que K^* es un cuerpo. En K^* definimos:

$$+: K^* \times K^* \longrightarrow K^*$$
$$([\alpha],[\beta]) \rightsquigarrow [\alpha+\beta]$$

donde

$$\alpha+\beta : A \longrightarrow K$$
$$a \rightsquigarrow \alpha(a)+\beta(a)$$

y

$$\cdot : K^* \times K^* \longrightarrow K^*$$
$$([\alpha],[\beta]) \rightsquigarrow [\alpha\cdot\beta]$$

donde

$$\alpha\cdot\beta : A \longrightarrow K$$
$$a \rightsquigarrow \alpha(a)\cdot\beta(a)$$

No es difícil probar que las anteriores operaciones están bien definidas y que además $(K^*,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad. Faltaría ver que si $[\alpha] \in K^*$ tal que $[\alpha] \neq [\tilde{0}]$ donde

$$\tilde{0} : A \rightarrow K,$$
$$a \rightsquigarrow 0$$

entonces existe $[\beta] \in K^*$ tal que

$$[\alpha]\cdot[\beta] = [\tilde{1}]$$ (1)

Como $\alpha \not\sim \tilde{0}$ entonces

$$\{a \in A / \alpha(a) \neq 0\} \in \mathcal{F}_A$$

---

(1) $\tilde{1} : A \rightarrow K$
$a \rightsquigarrow 1$

Consideremos la función $\hat{\alpha}:A \to K$ dada por

$$\hat{\alpha}(a) = \alpha(a) \quad \text{si} \quad \alpha(a) \neq 0$$
$$\hat{\alpha}(a) = 1 \quad \text{si} \quad \alpha(a) = 0.$$

Tenemos que:

$$\{a \in A/\hat{\alpha}(a) = \alpha(a)\} \supseteq \{a \in A/\alpha(a) \neq 0\},$$

por lo tanto

$$\{a \in A/\hat{\alpha}(a) = \alpha(a)\} \in \mathcal{F}_A,$$

luego $[\hat{\alpha}] = [\alpha]$. Sea $\beta:A \to K$ dada por $\beta(a) = \frac{1}{\hat{\alpha}(a)}$ entonces:

$$[\alpha]\cdot[\beta] = [\beta]\cdot[\alpha] = [\hat{1}]. \quad \blacktriangle$$

(ii) Supongamos que para todo cuerpo K, $K^* = \tilde{\mathcal{F}}_A(K)$ es un cuerpo, y demostremos que $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro sobre A; es decir veremos que para cualquier conjunto $C \subseteq A$ una y sólo una de las siguientes proposiciones se satisface:

(1) $C \in \mathcal{F}_A$ ó, (2) $C^c \in \mathcal{F}_A$.

Supongamos que $C \notin \mathcal{F}_A$ entonces sea $\psi:A \to \mathbb{Z}_2$ dada por $\psi(a) = 1$ si $a \notin C$ y $\psi(a) = 0$ si $a \in C$. Como estamos suponiendo que $C \notin \mathcal{F}_A$ entonces:

$$C = \{a \in A/\psi(a) = 0\} \notin \mathcal{F}_A.$$

Por lo tanto, $\psi \not\sim \tilde{0}$ y como K^* es un cuerpo existe $[\psi]^{-1} = [\psi^{-1}]$, tal que $[\psi]\cdot[\psi^{-1}] = [\tilde{1}]$, luego

$$\{a \in A/\psi(a)\cdot\psi^{-1}(a) = 1\} \in \mathcal{F}_A.$$

Pero:

$$\{a \in A/\psi(a)\cdot\psi^{-1}(a) = 1\} = \{a \in A/\psi(a) = \frac{1}{\psi^{-1}(a)}\}$$

$$\subseteq \{a \in A/\psi(a) \neq 0\} = C^c.$$

Como $\mathcal{F}_A$ es un filtro, entonces $C^c \in \mathcal{F}_A$ y por lo tanto, $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro. ▲

En el caso de los conjuntos totalmente ordenados tenemos un resultado similar:

TEOREMA. Sea $(A,\mathcal{F}_A)$ un conjunto filtrado. $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro si y sólo si para todo conjunto totalmente ordenado $(B,\leqslant)$, $\tilde{\mathcal{F}}_A(B) = (B^*,\leqslant)$(1) es totalmente ordenado.

Demostración. (i) Supongamos que $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro y que $(B,\leqslant)$ es un conjunto totalmente ordenado. Veamos que $\tilde{\mathcal{F}}_A(B)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Si $[\alpha],[\beta] \in B^*$ entonces, por propiedades de

---

(1) Si $[\alpha],[\beta] \in B^*$ decimos que $[\alpha] \leqslant [\beta]$ si $\{a \in A/\alpha(a) \leqslant \beta(a)\} \in \mathcal{F}_A$

los ultrafiltros, una y sóla una de las siguientes propiedades es verdadera:

$$\{a \in A/\alpha(a) < \beta(a)\} \in \mathcal{F}_A$$

ó $$\{a \in A/\alpha(a) = \beta(a)\} \in \mathcal{F}_A$$

ó $$\{a \in A/\alpha(a) > \beta(a)\} \in \mathcal{F}_A.$$

Esto es, $[\alpha] < [\beta]$, ó, $[\alpha] = [\beta]$, ó $[\alpha] > [\beta]$. Luego B^* es totalmente ordenado. ▲

(ii) Supongamos que para todo conjunto totalmente ordenado $(B,\leq)$ se tiene que $(B^*,\leq)$ es totalmente ordenado. Demostremos que $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro.

Sea $C \subseteq A$ cualquiera, y supongamos que $C \notin \mathcal{F}_A$. Consideremos la función $\psi: A \to \mathbb{Z}_2$ dada por:

$$\psi(a) = 1 \quad \text{si} \quad a \notin C,$$
$$\psi(a) = 0 \quad \text{si} \quad a \in C.$$

Entonces tenemos que:

$$\{a \in A/\psi(a) < 0\} \notin \mathcal{F}_A$$

y que

$$\{a \in A/\psi(a) = 0\} = C \notin \mathcal{F}_A.$$

Como $\mathbb{Z}_2^*$ es totalmente ordenado, entonces:

$$C^c = \{a \in A/\psi(a) > 0\} \in \mathcal{F}_A. \quad ▲$$

De las demostraciones hechas para los dos teoremas anteriores, podemos afirmar que si $(A,\mathcal{F}_A)$ es un conjunto filtrado las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro.

(2) $\tilde{\mathcal{F}}_A(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^*$ es un cuerpo.

(3) $\tilde{\mathcal{F}}_A(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^*$ es totalmente ordenado. ▲

Ahora bien, si $(A,\mathcal{F}_A)$ es un conjunto filtrado cualquiera, entonces es evidente que

$$\tilde{\mathcal{F}}_A(\emptyset) = \emptyset$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_A(\{0\}) = \{0\}.$$

Sin embargo, es bien conocido que si $(A,\mathcal{F}_A)$ es un conjunto filtrado cualquiera y X es un conjunto cualquiera, no necesariamente se tiene que $X^* \simeq X$.

Para el caso de los conjuntos finitos el uso de los ultrafiltros simplifica la situación, ya que, si X es un conjunto finito y $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro, entonces

$$X = \tilde{\mathcal{F}}_A(X) \simeq X.$$

En efecto, supongamos que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La función:

$$\begin{aligned} \theta : X &\to X^* \\ x &\rightsquigarrow [\tilde{x}] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{x} : A &\to X \\ a &\rightsquigarrow x \end{aligned}$$

es una biyección:

(1) θ es uno a uno, ya que si $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ es evidente que $[\tilde{x}_1] \neq [\tilde{x}_2]$.

(2) θ es sobre, pues si $[\sigma] \in X^*$, es claro que $A = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma^{-1}(\{x_i\})$ y como $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro, esto implica que $\sigma^{-1}(\{x_j\}) \in \mathcal{F}_A$ para algún j. Supongamos que $\sigma^{-1}(\{x_1\}) \in \mathcal{F}_A$, entonces $\tilde{x}_1 \sim \sigma$ ya que $\{a / \sigma(a) = x_1\} \in \mathcal{F}_A$. Esto es, $[\sigma] = \theta(x_1)$. ▲

En particular, para todo $(A, \mathcal{F}_A)$ con $\mathcal{F}_A$ ultrafiltro, tenemos que $\mathbb{Z}_n^* \simeq \mathbb{Z}_n$.

El resultado anterior nos indica que el filtro sobre $\mathbb{N}$ generado por el conjunto P de números pares no es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$.

Además, tenemos que si X es un conjunto cualquiera que tiene por lo menos dos puntos distintos y θ es sobre, entonces $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro. Pues, si X tiene por lo menos dos puntos distintos $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$, y si $C \subseteq A$ es un conjunto cualquiera, entonces para la función: $\alpha : A \to X$ dada por

$\alpha(a) = x_1$ si $a \in C$; $\alpha(a) = x_2$ si $a \notin C$

se tiene que $\alpha \sim \tilde{x}_1$, ó $\alpha \sim \tilde{x}_2$ dado que θ es sobre. Por lo tanto, si $\alpha \sim \tilde{x}_1$, entonces el conjunto $C = \{a \in A / \alpha(a) = x_1\} \in \mathcal{F}_A$; y si $\alpha \sim \tilde{x}_2$ entonces $C^c = \{a \in A / \alpha(a) = x_2\} \in \mathcal{F}_A$. Por consiguiente, $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro.

En resumen, se tiene que:

(1) Si θ es sobre y X tiene por lo menos dos puntos distintos entonces $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro.

(2) Si $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro y X es finito entonces θ es sobre.

Si $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro no trivial entonces A debe ser infinito [1]; luego si X es un conjunto infinito y $|A| \leq |X|$ [2], la función θ no puede ser sobre ya que si lo fuera existiría una función $\alpha : A \to X$ de rango infinito que debería ser equivalente a una función constante lo cual no es posible [3].

---

(1) A no puede ser finito, ya que si $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}$, entonces como $\mathcal{F}_A$ es un ultrafiltro,

$$\{a_i\} \in \mathcal{F}_A \text{ para algún } i,$$

y por lo tanto $\mathcal{F}_A = \mathcal{F}_{\{a_i\}}$.

(2) $|A|$ denota al cardinal de A.

(3) Para el caso de $|A| > |X|$ no es difícil demostrar que el resultado es válido si $|A| \leq c$.

Finalmente, mostraremos un hecho curioso que permite afirmar que todo conjunto es un "estrella" (para un caso especial de filtro):

Sea A un conjunto no vacío. Consideremos $M \subset A$ y sea $\mathcal{F}_M$ el filtro generado por M. Esto es,

$$\mathcal{F}_M = \{P \subseteq A/M \subseteq P\}.$$

Sea X un conjunto cualquiera, veamos que

$$\tilde{\mathcal{F}}_M(X) \simeq \mathrm{Conj}(M,X) = X^M.$$

En primer lugar, tenemos para este filtro $\mathcal{F}_M$ que si $\sigma,\mu \in \mathrm{Conj}(A,X)$ entonces $\sigma \sim \mu$ si y sólo si $\sigma|_M = \mu|_M$, ya que si $\sigma \sim \mu$ entonces $\{a \in A/\sigma(a) = \mu(a)\} \in \mathcal{F}_M$. Por lo tanto, como $M \subset \{a \in A/\mu(a) = \sigma(a)\}$, se tiene que si $x \in M$ $\mu(x) = \sigma(x)$, esto es, $\sigma|_M = \mu|_M$.

Por otra parte, si $\sigma|_M = \mu|_M$ entonces:

$$\{a \in A/\mu(a) = \sigma(a)\} \supset \{a \in M/\sigma(a) = \mu(a)\} = M,$$

Por consiguiente, $\{a \in A/\mu(a) = \sigma(a)\} \in \mathcal{F}_M$, esto es, $\sigma \sim \mu$.

Por lo tanto, la función

$$\begin{aligned} \psi : \tilde{\mathcal{F}}_M(X) &\to \mathrm{Conj}(M,X) \\ [\sigma] &\to \sigma|_M \end{aligned}$$

está bien definida y es uno a uno. Además ψ es sobre, ya que si $\alpha \in \mathrm{Conj}(M,X)$ entonces la función $\sigma \in \mathrm{Conj}(A,X)$ dada por $\sigma(a) = \alpha(a)$ si $a \in M$ y $\sigma(a) = x_o$ (donde x_o es punto arbitrario de X) si $a \notin M$ es tal que $\psi([\sigma]) = \alpha$.

Luego ψ es una biyección, de donde,

$$\tilde{\mathcal{F}}_M(X) \simeq \mathrm{Conj}(M,X) = X^M. \blacktriangle$$

Veamos unos ejemplos:

1) Si $X = \mathbb{R}$ y $M = \{a\}$ entonces $\mathbb{R}^* = \tilde{\mathcal{F}}_M(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$. $\blacktriangle$

2) Si $X = \mathbb{R}$ y $M = \{a_1, a_2\}$ entonces $\mathbb{R}^2 \simeq \tilde{\mathcal{F}}_M(\mathbb{R})$. $\blacktriangle$

En general si $X = \mathbb{R}$ y $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ entonces:

$$\mathbb{R}^n \simeq \tilde{\mathcal{F}}_M(\mathbb{R}).$$

3) Si X es un conjunto cualquiera y $(A, \mathcal{F}_{\{a\}})$ es un conjunto filtrado donde $\mathcal{F}_{\{a\}}$ es el filtro generado por $\{a\} \subseteq A$, entonces:

$$X^* \simeq \mathrm{Conj}(\{a\}, X) \simeq X. \blacktriangle$$

* *

BIBLIOGRAFIA

[1] Bourbaki, N., *General Topology*, Part I. Addison-Wesley, 1966.

[2] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1972.

*