Boletín de Matemáticas
Vol. XIX, Nº 1, (1985)

APORTES

CONJUNTOS SOPORTADORES PROPIOS DE UN OPERADOR DE MARKOV

Myriam Muñoz de Özak

Si S es un espacio localmente compacto de Hausdorff, definimos el espacio de Banach

$$L^p(m) = L^p(S,B,m) := \{\text{clases de equivalencias de las funciones } f : S \to \mathbb{R} : \int_S |f|^p dm < \infty\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

donde m es una medida cualquiera.

Abusando de la escritura, decimos que $f = g$ en $L^p(m)$ si f y g son iguales fuera de un conjunto de m-medida cero.

Sine en su artículo "Geometric Theory of a single Markov Operator" desarrolla una teoría sc e conjuntos soportadores propios de un operador de Markov, definido sobre el espacio de las funciones continuas en S, $C(S)$. Uno de los resultados en este artículo es el de que el conjunto conservativo es cerrado.

Jamison considera los mismos conjuntos soportadores propios, que él llama topológica y estocásticamente cerrados, y además del operador T trabaja con el operador $T = U^*$ definido sobre el espacio de medidas finitas $C^*(S)$.

El establece una equivalencia, entre la convergencia uniforme de la sucesión

$$\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k f\}$$

hacia una función invariante y la convergencia $*$-débil de la sucesión $\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x,\cdot)\}$ hacia una probabilidad invariante.

Si reemplazamos a $C(S)$ por $L^p(m)$, sólo para $p = 1,2$, se tendrá la convergencia en $L^p(m)$ de $\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k f\}$ hacia una función invariante.

El objetivo de este trabajo es el de generalizar la teoría ya desarrollada por Sine y Jamison para conjuntos suportadores propios de un operador de Markov definido en $C(S)$, a conjuntos soportadores propios del operador de Markov definido en $L^p(m)$.

§1. DEFINICION DEL OPERADOR DE MARKOV.

Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso de Markov homogéneo definido en un espacio de medida $(S,\mathcal{B},m)$ donde m es una medida invariante positiva.

Sea también $P(t,x,E)$, $t\in\mathbb{R}^+$, $x\in S$, $E\in\mathcal{B}$ la probabilidad de transición asociada a $\{X_t\}$, la cual cumple las siguientes condiciones:

a) $0 \leqslant p(t,x,E) \leqslant 1$ cualesquiera que sean $t>0$, $x\in S$ y $E\in\mathcal{B}$.

b) $P(t,x,S) = 1$ para todo $t>0$ y $x\in S$ arbitrarios.

c) Para t y x fijos $P(t,x,E)$ es σ-aditiva en E.

d) Para x y E fijos

$$P(t+s,x,E) = \int_S P(t,x,dy)\,P(s,y,E)$$

e) Para todo $E\in\mathcal{B}$.

$$\int_S m(dx)P(t,x,E) = m(E).$$

DEFINICION 1.1. Un operador de Markov en $L^p(m)$ es un operador lineal acotado $T: L^p(m)\to L^p(m)$ tal que $T(\mathbb{1}) = 1 = \|T\|$, donde $\mathbb{1}$ es la función constante igual a 1 y $\|T\| = \sup\limits_{\|f\|_p=1}\|Tf\|_p$.

(i) $P^1(x,E) = P(1,x,E)$

(ii) $P^{n+1}(x,E) = \int_S P^n(y,E)P(x,dy), \quad n = 1,2,\ldots$

Ahora bien a partir de este operador definimos

$$(T^n f)(x) = \int_S f(y)P^n(x,dy).$$

Los T^n así definidos son operadores de Markov en L^p para todo $n = 1,2,\ldots$

Paralelamente a L^p podemos considerar el espacio vectorial $\mathfrak{M}$ de medidas sobre $\mathcal{B}$, con norma

$$\|\mu\| = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|, \quad S = \dot{\bigcup_{E_i \in \mathcal{B}}} E_i$$

Sobre este espacio podemos definir los operadores U^n, $n = 1,2,\ldots$ como sigue

$$(U^n\mu)(E) = \int_S P^n(x,E)\mu(dx), \quad n = 1,2,\ldots$$

Escribiremos $U^1 = U$.

DEFINICION 1.4. Una probabilidad sobre $\mathcal{B}$ es una medida positiva μ tal que $\|\mu\| = 1 = \mu(S)$.

LEMA 1.5. U es un operador lineal, continuo que preserva el orden en el sentido de que si $\nu \ll \mu$, entonces $U\nu \ll U\mu$ ($\ll$ significa absolutamente continuo).

Demostración. $\|U\mu\| = U|\mu|(S) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |U\mu(E_i)|$

$$\leq \sup \sum_{i=1}^{\infty} \int_S P(x,E_i)|\mu|(dx) \leq \int_S P(x,S)|\mu|(dx)$$

$$= |\mu|(S) = \|\mu\|.$$

O sea, se ha demostrado que $\|U\mu\| \leq \|\mu\|$, de donde U es continuo.

Ahora, si $\nu \ll \mu$, es decir si $\nu(E) = 0$ cuando $\mu(E) = 0$ y si

$$(U\mu)(E) = 0 = \int_S P(x,E)\mu(dx),$$

entonces

$\{x: P(x,E) \neq 0\} \cap$ soporte $\mu = \emptyset$ o sea que

$\{x: P(x,E) \neq 0\}$ tiene μ-medida cero.

Como soporte de $\mu \supseteq$ soporte de ν, entonces

$\{x: P(x,E) \neq 0\} \cap$ soporte de $\nu = \emptyset$

o sea tiene ν-medida cero.

Entonces $U\nu(E) = \int_S P(x,E)\nu(dx) = 0$, o sea que $U\nu \ll U\mu$

La linealidad es obvia. ▲

Se puede ver fácilmente que el conjunto de probabilidades en $\mathcal{B}$ es un conjunto convexo y secuencialmente compacto en la topología débil de $\mathcal{M}$, así que, por el teorema del punto fijo de Schrauder, para el operador U, existe un subespacio vectorial K_F que contiene todas las probabilidades invariantes con respecto a U.

Las funciones constantes en S son funciones invariantes respecto al operador T; la suma y el producto por escalares de funciones invariantes son igualmente funciones invariantes. Por lo tanto, existe también un subespacio M de $L^p(m)$ que contiene exclusivamente a las funciones invariantes bajo T.

Definimos en S la relación de equivalencia $x \sim y$ sii $f(x) = f(y)$ para todo $f \in M$. Así se determinan clases de equivalencia D y denotaremos por $\mathfrak{D}$ a la colección de todas estas clases.

Si M sólo contiene las funciones constantes entonces $\mathfrak{D}$ sólo tendrá una clase, igual a S. Si en cambio M contiene funciones escalonadas, las clases de equivalencia serán conjuntos medibles. Si nos restringimos a funciones continuas, las clases de equivalencia son conjuntos cerrados.

§2. CONJUNTOS SOPORTADORES PROPIOS.

En este parágrafo, mientras no se diga otra cosa T y U son los operadores de Markov definidos en el §1.

DEFINICION 2.1. El soporte de una probabilidad P denotado por $\mathcal{S}(P)$ es el mínimo elemento cerrado (topológicamente) $A \in \mathcal{B}$ tal que $P(A) = 1$.

DEFINICION 2.2. Decimos que un conjunto medible y cerrado F es soportador propio si el soporte de $P(x,\cdot)$ está contenido en F para cada $x \in F$.

Llamamos $\mathcal{F}$ la colección de soportadores propios.

Observación. Si E es soportador propio,

$$m\{x : x \notin E \wedge P(x,E) > 0\} = 0$$

para toda medida invariante m.

En efecto, como m es invariante

$$m(E) = \int_S P(x,E)m(dx) = \int_E P(x,E)m(dx)$$

$$+ \int_{S-E} P(x,E)m(dx) = m(E) + \int_{S-E} P(x,E)m(dx),$$

entonces $\int_{S-E} P(x,E)m(dx) = 0$ de manera que

$$m\{x: x \notin E \wedge P(x,E) > 0\} = 0.$$

TEOREMA 2.3. Un conjunto medible cerrado F es soportador propio si y sólo si Tf se anula en F cuando f se anula en F.

Demostración. Sean $F \in \mathcal{F}$, $f = 0$ en F y $x \in F$ entonces ya que $\mathcal{S}(P(x,\cdot)) \subseteq F$

$$(Tf)(x) = \int_S f(y)P(x,dy) = 0.$$

Si por el contrario, $x \in F$ y $\mathcal{S}(P(x,\cdot)) \not\subseteq F$, sea $H_x = \mathcal{S}(P(x,\cdot))$, claramente

$$H_x - F \neq \emptyset \quad \text{y} \quad P(x, H_x - F) > 0.$$

Definamos

$$f(y) = \begin{cases} 1 & y \in H_x - F \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, f se anula en F pero

$$(Tf)(x) = \int_S f(y)P(x,dy) = \int_{H_x - F} P(x,dy)$$

$$= P(x, H_x - F) > 0.$$

Como lo anterior es cierto para cada $x \in F$, entonces Tf no se anula en F, por consiguiente F debe ser soportador propio.

La importancia de los soportadores propios radica en que el proceso se puede localizar en estos conjuntos. Si $F \in \mathcal{F}$, $T|_F$ en $L^p(F,\mathcal{B}_F,m)$ se define por $(T|_F)(f) = (Th)|_F$ donde h es una extensión medible de f, o sea una aplicación medible $h:S \to \mathbb{R}$ tal que $h|_F = f$.

TEOREMA 2.4. Si $f = \chi_E$ es la función característica de E, entonces $f \in M$ si y sólo si E es soportador propio.

Demostración. Si $f \in M$, entonces $Tf = f$. Luego,

$$(Tf)(x) = \int_S f(y)P(x,dy) = \int_E P(x,dy)$$
$$= P(x,E) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Entonces $\mathcal{S}(P(x,\cdot)) \subseteq E$ para todo $x \in E$.

Recíprocamente, veamos que si E es soportador propio, entonces $\chi_E \in M$.

Como $m\{x : x \notin E \wedge P(x,E)\} = 0$, entonces

$$(Tf)(x) = \int_E P(x,dy) = P(x,E) = \left\{\begin{matrix} 1, & \text{si } x \in E \\ 0, & \text{si } x \notin E \end{matrix}\right\} = f(x)$$

excepto tal vez en un conjunto de medida cero. Se tiene, entonces, que $Tf = f$ en el sentido de $L^p(m)$, es decir, f es invariante. ▲

Como consecuencia del anterior teorema vemos que si f es una función simple ($f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$) entonces $f \in M$ si y sólo si $E_i \in \mathcal{F}$, $i = 1,2,..n$.

***TEOREMA* 2.5.** Si μ es una probabilidad invariante entonces $\mathcal{S}(\mu)$ es soportador propio.

Demostración. Veamos que si $f = 0$ en $\mathcal{S}(\mu)$ entonces $Tf = 0$ en $\mathcal{S}(\mu)$, lo cual demostrará el resultado.

$$\int_S (Tf)(y)\mu(dy) = \int_S \int_S f(x)P(y,dx)\mu(dy)$$

$$= \int_S f(x)(U\mu)(dx) = \int_S f(x)\mu(dx) = 0,$$

ya que $U\mu = \mu$ y $f = 0$ en $\mathcal{S}(\mu)$. Entonces $Tf = 0$ en $\mathcal{S}(\mu)$ en el sentido de $L^p(\mu)$. Como μ es invariante, μ puede jugar el papel de m. ▲

***DEFINICION* 2.6.** Diremos que f es μ-invariante si $Tf = f$ en $\mathcal{S}(\mu)$ en el sentido de $L^p(\mu)$.

***LEMA* 2.7.** Para cada $\mu \in K_F$, el conjunto de las funciones μ-invariantes forma un álgebra con respecto a las operaciones $\wedge$ y $\vee$.

Demostración. Demostraremos solamente que $f \vee g$ es μ-invariante, si f y g lo son. La demostración para $f \wedge g$ es análoga.

Como $f, g \leq f \vee g$ y T preserva el orden, $Tf \leq T(f \vee g)$ y $Tg \leq T(f \vee g)$ pero $Tf = f$ y $Tg = g$ en $\mathcal{S}(\mu)$. Entonces $f \leq T(f \vee g)$ y $g \leq T(f \vee g)$ en $\mathcal{S}(\mu)$, o sea $(f \vee g) \leq T(f \vee g)$ en $\mathcal{S}(\mu)$.

Por otro lado

$$\int_S (f \vee g) d\mu \leq \int_S T(f \vee g) d\mu = \int_S T(f \vee g)(x)\mu(dx)$$

$$= \int_S \int_S (f \vee g)(y) P(x, dy)\mu(dx) = \int_S (f \vee g)(y)(U\mu)(dy)$$

$$= \int_S (f \vee g)(y)\mu(dy).$$

Entonces, $f \vee g = T(f \vee g)$ en el sentido de $L^p(\mu)$. ▲

TEOREMA 2.8. Sean $f \in M$ y μ una probabilidad invariante con soporte $\mathcal{S}(\mu)$. Entonces para cada conjunto de Borel A de números reales, no vacío y contenido en el rango de f, $f^{-1}(A) \cap \mathcal{S}(\mu)$ es soportador propio.

Demostración. Primero que todo, restrijamos el operador T a un operador de Markov en $\mathcal{S}(\mu)$; entonces, toda función μ-invariante es invariante con respecto a $T|_{\mathcal{S}(\mu)}$.

Por el lema anterior, el conjunto de funciones invariantes de $T|_{\mathcal{S}(\mu)}$ es un álgebra; y si

$f \in M$, entonces f es constante en cada clase de equivalencia $D \in \mathcal{D}$.

Sea $\varphi = \chi_A$. Si h es la restricción de f a $\mathcal{S}(\mu)$, entonces $\varphi \circ h$ es constante en cada clase de equivalencia.

Entonces

$$\int_{\mathcal{S}(\mu)} T|_{\mathcal{S}(\mu)}(\varphi \circ h)(x)\mu(dx)$$

$$= \sum_{D\in\mathcal{D}} \int_{D\cap\mathcal{S}(\mu)} T|_{\mathcal{S}(\mu)}(\varphi \circ h)(x)\mu(dx)$$

$$= \sum_{D\in\mathcal{D}} \int_{D\cap\mathcal{S}(\mu)} \int_{\mathcal{S}(\mu)} (\varphi \circ h)(y)P(x,dy)\mu(dx)$$

$$= \sum_{D\in\mathcal{D}} \int_{D\cap\mathcal{S}(\mu)} (\varphi \circ h)(y)(U\mu)(dy)$$

$$= \sum_{D\in\mathcal{D}} \int_{D\cap\mathcal{S}(\mu)} (\varphi \circ h)(y)\mu(dy) = \int_{\mathcal{S}(\mu)} (\varphi \circ h)(y)\mu(dy),$$

de donde, $T|_{\mathcal{S}(\mu)}(\varphi \circ h) = \varphi \circ h$ en $\mathcal{S}(\mu)$ en el sentido de $L^p(\mu)$, así que $\varphi \circ h$ es invariante en $\mathcal{S}(\mu)$. Se concluye que $\varphi \circ h$ también pertenece al álgebra.

Ahora, $(\varphi \circ h)^{-1}(1) = h^{-1}(\varphi^{-1}(1)) = h^{-1}(A)$ y, como $h = f|_{\mathcal{S}(\mu)}$, entonces

$$h^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap \mathcal{S}(\mu),$$

y

$$(\varphi \circ h)(x) = \begin{cases} 1, & f(x) \in A \text{ o sea } x \in f^{-1}(A) \cap S(\mu) \\ 0, & f(x) \notin A \text{ o sea } x \notin f^{-1}(A) \cap S(\mu). \end{cases}$$

Ya que $\varphi \circ h$ es invariante en $\mathcal{S}(\mu)$ y $\varphi \circ h = \chi_{f^{-1}(A) \cap \mathcal{S}(\mu)}$, concluimos que $f^{-1}(A) \cap \mathcal{S}(\mu)$ es soportador propio con respecto al operador $T|_{\mathcal{S}(\mu)}$ (Teorema 2.4). Ahora si g se anula en $f^{-1}(A) \cap \mathcal{S}(\mu)$ y h, definido en S, es tal que $h|_{\mathcal{S}(\mu)} = g$, entonces h se anula en $f^{-1}(A) \cap \mathcal{S}(\mu)$. Como $T|_{\mathcal{S}(\mu)} g = Th|_{\mathcal{S}(\mu)}$, entonces Th se anula en $f^{-1}(A) \cap \mathcal{S}(\mu)$, lo que implica que $f^{-1}(A) \cap \mathcal{S}(\mu)$ es soportador propio con respecto al operador T. ▲

TEOREMA 2.9. Si $F \in \mathcal{F}$, existe una probabilidad invariante con soporte contenido en F.

Demostración. Consideramos la inyección $i : F \to \mathcal{M}$ $i(x) = P(x, \cdot)$, e identificamos a x con $P(x, \cdot)$ o sea identificamos a F con $\{P(x, \cdot) : x \in F\}$.
Sea $F_o = C_o F$ la adherencia convexa de F.

F_o es un conjunto convexo; y como es un subconjunto cerrado del conjunto de probabilidades, es también secuencialmente compacto en la topología débil.

Veamos ahora que $U(F_o) \subseteq F_o$.

Haremos la demostración en tres etapas

1º Si $x \in F$, entonces $\mathcal{S}(P(x,\cdot)) \subseteq F$, o sea, $P(x,\cdot) \in F_o$.

Ahora bien,

$$U(P(x,E)) = \int_S P(y,E)P(x,dy) = P^2(x,E).$$

Veamos que el soporte de $P^2(x,E)$ está contenido en F. Como F es soportador propio, su función característica χ_F es invariante. Además,

$$\int_S \chi_F(y)P^2(x,dy) = T^2(\chi_F(x)) = \chi_F(x)$$

$$= \begin{Bmatrix} 1, & x \in F \\ 0, & x \notin F \end{Bmatrix} = P^2(x,F)$$

con lo cual queda demostrada la afirmación. Entonces, $U(P(x,\cdot)) \in F_o$.

2º Si $\mu \in C_oF$, $\mu = \alpha_1 P(x_1,\cdot)+\ldots+\alpha_n P(x_n,\cdot)$ con $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = 1$ y $x_1,\ldots,x_n \in F$; entonces

$$U\mu = \alpha_1 P^2(x_1,\cdot)+\ldots+\alpha_n P^2(x_n,\cdot),$$

así que

$$\int_S \chi_F U\mu = \alpha_1 \int_F P^2(x_1,dy)+\ldots+\alpha_n \int_F P^2(x_n,dy)$$

$$= \alpha_1+\ldots+\alpha_n = 1 = \int_F U\mu = (U\mu)(F).$$

De donde

$$\mathcal{S}(U\mu) \subseteq F, \quad \text{así que } U\mu \in F_o.$$

3º Si $\mu \in \overline{C_o F} = F_o$, existe una sucesión $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a μ con $\mu_n \in C_o F$ (o sea, $\mathcal{S}(\mu_n) \subseteq F$).

Como U es continua

$$U\mu(F) = \lim_{n\to\infty} (U\mu_n)(F) = \lim_{n\to\infty} \{\alpha_1 \int_F P^2(\chi_n^1, dy) + \ldots + \alpha_m \int_F P^2(\chi_n^m, dy)\} = 1 ,$$

de lo cual $U\mu \in F_o$.

Lo anterior permite concluir que $UF_o \subseteq F_o$. Ahora, dado que F_o es convexo y secuencialmente compacto, existe una probabilidad $\lambda \in F_o$ tal que $U\lambda = \lambda$ (Teorema del punto fijo de Schrau der). Esto implica que $\mathcal{S}(\lambda) \subseteq F$. ▲

TEOREMA 2.10. Si F es soportador propio minimal entonces F es el soporte de una probabilidad invariante y toda función invariante es constante en F.

Demostración. Por el Teorema 2.9, F contiene el soporte de una probabilidad invariante λ. Ahora, como F es minimal y toda probabilidad invariante tiene soporte que es soportador propio, entonces F es exactamente igual al soporte de la probabilidad invariante λ.

Supongamos ahora que f es invariante. Para cada $A \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(A) \cap F$ es soportador propio en virtud del Teorema 2.8. Como $f^{-1}(A) \cap F \subseteq F$ y F es minimal, entonces $f^{-1}(A) \cap F = \emptyset$ o $f^{-1}(A) \cap F = F$.

Sea $A = \{r\}$ con $r \in f(S)$. Se tiene que $f^{-1}(\{r\}) \cap F = \emptyset$ ó $f^{-1}(\{r\}) \cap F = F$, o sea que f es constante en F. ▲

*COROLARIO **2.11**.* Todo conjunto soportador propio minimal está contenido en exactamente un $D \in \mathcal{D}$.

Demostración. Como las funciones invariantes son constantes sobre un soportador propio minimal, el conjunto soportador propio está contenido en exactamente un $D \in \mathcal{D}$. ▲

Los elementos de $\mathcal{D}$ que soportan probabilidades invariantes se denominan conjuntos ergódicos. Denotaremos con $\mathcal{E}$ a la colección de conjuntos ergódicos.

El conjunto conservativo correspondiente es

$$W = \cup\{E : E \in \mathcal{E}\}.$$

Es posible que $W = \emptyset$ o que $W = S$.

Por lo general, la colección de conjuntos ergó dicos es una subcolección propia de $\mathcal{D}$. Es también posible que un conjunto ergódico contenga más de un conjunto soportador propio.

* *

BIBLIOGRAFIA

[1] Ash, R., *Real Analysis and Probability*. Academic Press, New York, 1972.

[2] Jamison, B., "Ergodic decompositions induced by certain Markov Operators". Trans. Amer. Math. Soc., 117 (1965), pp. 451-468.

[3] Royden, H., *Real Analysis*. Mac Millan, New York, 1968.

[4] Sine, R., "Geometric Theory of a Single Markov Operator", Pacific Journal of Mathematics, 27 (1968), pp.155-166.

[5] Yosida, K., *Functional Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1974.

*