Boletín de Matemáticas
Vol. XVIII, Nº 1,2,3, (1984) **APUNTES**

UNA RUTINA PARA CALCULAR LOS "POLINOMIOS ESPECIALES" DE LA FISICA

Mauricio García - Jeannine Ewert

O. INTRODUCCION.

Por medio de una calculadora de bolsillo programable que en nuestro caso es una Casio Modelo FX-702 P, es posible (sin agotar la memoria de la máquina), el cálculo para cualquier argumento y cualquier orden de los siguientes polinomios:

Ordinarios Legendre
Asociados Legendre
Ordinarios Laguerre
Asociados Laguerre
Hermite
Chevychev T
Chevychev U

Con este tipo de rutinas se evita el uso de tablas que aun cuando muy completas [1] por razones obvias no pueden poseer todos los argumentos o los órdenes que una aplicación concreta requiere. Se pretende entonces, evitar interpolaciones engorrosas susceptibles de errores y se logra la comodidad de acceder a valores precisos de los polinomios especiales de la Física que en ciertos casos ni siquiera se encuentran tabulados.

1. EL METODO EMPLEADO.

Debido a la ausencia de problemas de convergencia, como a la de acumulación de errores, es posible la utilización directa de las fórmulas de recurrencia de los polinomios mencionados. En consecuencia, una vez dado el argumento, es posible iniciar las rutinas con los polinomios de orden cero y uno, y recurrentemente calcular los polinomios hasta el orden necesario.

A continuación mostramos las fórmulas empleadas: [1], [2], [3] y [4]

i) Polinomios Ordinarios de Legendre.

$P_o(x) = 1; \quad P_1(x) = x;$

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

ii) Polinomios Asociados de Legendre.

Para este caso se parte de la siguiente recurrencia:

$$P_n^{m+2}(x) = \frac{2(m+1)x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{m+1}(x)-(n-m)(n+m+1)P_n^m(x)$$

El polinomio $P_n^o(x)$ proviene del resultado trivial $P_n^o(x) = P_n(x)$ mientras que $P_n^1(x)$ viene dado por:

$$P_n^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_n'(x).$$

Por otra parte:

$$(x^2-1)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

Por consiguiente:

$$P_n^1(x) = \frac{n(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2-1}(xP_n(x)-P_{n-1}(x)).$$

Además, por la parte i) en el cálculo de $P_{n+1}(x)$ se necesitó $P_n(x)$ y $P_{n-1}(x)$ quedando ya lista la posibilidad de emplear la recurrencia para los Polinomios Asociados de Legendre.

También se tiene que:

$$P_n^m(0) = 0; \quad P_n^m(x) = 0 \quad \text{si } m > n$$

iii) Polinomios Ordinarios de Laguerre:

Para estos polinomios existen dos posibles representaciones. En nuestro caso adoptamos aquella en donde la relación de recurrencia (ver [2]) es:

$$L_{n+1}(x) - (2n-x+1)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0$$

con

$$L_o(x) = 1; \quad L_1(x) = 1-x; \quad L_n(0) = n\,!$$

iv) Polinomios Asociados de Laguerre.

Estos polinomios satisfacen la siguiente relación:

$$xL_n^{m+1}(x) = (x-m)L_n^m(x) + (m-n-1)L_n^{m-1}(x).$$

Acá se presenta de nuevo el inconveniente para la iniciación de la recurrencia. Sin embargo:

$$L_n^o(x) = L_n(x); \quad L_n^1(x) = L_n'(x).$$

A partir de la condición:

$$xL_n'(x) = nL_n(x) \quad n^2 L_{n-1}(x).$$

Concluímos que:

$$L'_n(x) = \frac{1}{x}(nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)) = L_n^1(x),$$

quedando lista la utilización de la fórmula de arriba, con la ayuda de $L_n(x)$ y $L_{n-1}(x)$. El comportamiento en el origen de $L_n^m(x)$ no es evidente y la literatura es muy parca al respecto. Explicitando las expresiones analíticas de los primeros cinco polinomios de Laguerre y sus correspondientes asociados se observa que:

$$L_n^m(0) = (-1)^m \binom{n}{m} n!$$

donde $\binom{n}{m}$ es el coeficiente binomial.

Se debe notar la validez general de la expresión ya que si $m = 0$:

$$L_n^o(0) = L_n(0) = (-1)^o \binom{n}{0} n! = n!$$

Como $L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$ se concluye que $L_n^m(x) = 0$ si $m > n$,

v) Polinomios de Hermite.

Para este caso, la recurrencia viene dada por:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

con:

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x.$$

vi) Polinomios de Chevychev (T).

Aquí la recurrencia es:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

Junto con:

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x.$$

vii) Polinomios de Chevychev (U).

Las expresiones explícitas para $U_0(x)$ y $U_1(x)$ son:

$$U_0(x) = 1; \quad U_1(x) = 2x.$$

satisfaciendo la misma relación de recurrencia que los polinomios $T_n(x)$.

2. EL PROGRAMA.

La memoria de la máquina se divide en seis partes, donde la partición $P\emptyset$, está dedicada a controlar las variables de entrada (los subíndices de los polinomios, el orden y el argumento) así como la ejecución de las cinco subrutinas de acuerdo al polinomio particular a ser ejecutado. En consecuencia el $P1$ (Programa 1) está dedicado al cálculo de los polinomios (ordinarios o asociados) de Legendre, $P2$ contiene la subrutina para los de Laguerre (ordinarios o asociados), $P3$ ejecuta la recurrencia para los polinomios de Hermite, $P4$ realiza los Chevychev (T) y $P5$ contiene la rutina de cálculo para los Chevychev (U).

La ejecución se controla en PØ por medio de la variable C, Código, un número entero de 1 a 5 de acuerdo a lo mencionado inmediatamente antes. Es decir, si Código = 3, la rutina se encargará del cálculo $H_n(x)$ ya que el argumento y el orden del polinomio son las entradas siguientes.

A manera de ilustración, presentamos el diagrama de flujo que permite calcular los polinomios de Legendre o los Polinomios Asociados de Legendre según sea el caso.

N subíndice en $P_n^m(x)$
M superíndice en $P_n^m(x)$
X argumento de $P_n^m(x)$
Q variable auxiliar para $P_n(x)$
O variable auxiliar para $P_{n-1}(x)$
R variable auxiliar para $P_{n+1}(x)$
S variable auxiliar para $P_n^m(x)$
U variable auxiliar para $P_n^{m+2}(x)$

T valor evaluado del polinomio

J,I variables enteras para la iteración.

Al final presentamos las gráficas de los Polinomios objeto del presente artículo, para algunos valores de los órdenes de los mismos.

EL PROGRAMA.

PØ

```
 1Ø INP "CODIGO", C
 2Ø IF C ≤ Ø THEN 15Ø
 3Ø IF FRAC C ≠ Ø THEN 15Ø
 4Ø IF C > 5 THEN 15Ø
 5Ø INP "N=", N
 6Ø IF N < Ø; WAIT 2Ø:PRT"ERROR,N <Ø":GO TO 5Ø
 7Ø IF FRAC  N ≠ Ø; WAIT 2Ø: PRT "ERROR, NFRAC":GO TO 5Ø
 8Ø INP "X=", X
 9Ø GSB#C
1ØØ IF C ≤ 2 THEN 13Ø
11Ø PRT "PN="; R:STOP
12Ø GO TO 1Ø
13Ø PRT "PN↑M="; T:STOP
14Ø GO TO 1Ø
15Ø WAIT 2Ø: PRT "ERROR, 1≤ COD ≤ 5": GO TO 1Ø
```

P1

```
2Ø INP "M=", M
3Ø IF M < Ø; PRT "ERROR, M < Ø": STOP
4Ø IF FRAC M ≠ Ø; PRT "ERROR,MFRAC": STOP
5Ø IF M > N THEN 52
51 GO TO 53
52 WAIT 2Ø: PRT "ASS.LGDRE.": T = Ø: RET
53 IF ABS x = 1 THEN 55
54 GO TO 6Ø
55 IF M > Ø THEN 52
```

```
60 Q = X: O = 1
70 IF N = 0; WAIT 20:PRT "ORD.LGDRE.": T=0:RET
80 IF N = 1 THEN 220
90 FOR I = 1 TO N-1
100 R=((2*I+1)*X*Q-I*O)/(I+1)
110 O = Q: Q = R
120 NEXT I
130 IF M = 0 ; WAIT 20: PRT "ORD.LGDRE.": T = R:RET
140 WAIT 20: PRT "ASS.LGDRE."
150 IF M = 1; T = N*SQR(1-X*X)*(X*Q-O)/(X*X-1):RET
160 S = R: T = N*SQR(1-X*X)*(X*Q-O)/(X*X-1)
170 FOR J = 0 TO M-2
180 U = 2*(J+1)*X*T/SQR(1-X*X)-(N-J)*(N+J+1)*S
190 S = T: T = U
200 NEXT J
210 RET
220 IF M = 1; WAIT 20:PRT "ASS.LGDRE.":T = SQR(1-X*X):RET
230 WAIT 20: PRT "ORD.LGDRE.": T = Q: RET.
```

P2

```
10 INP "M=", M
20 IF M < 0; PRT "ERROR, M < 0": STOP
30 IF FRAC M ≠ 0; "ERROR, MFFRAC": STOP
40 IF M > N; T = 0: RET
50 IF ABS X < 1 E-2; T = (-1)↑M*(N!)↑2/(N-M)!/M!:RET
60 Q = 1-X: O = 1
70 IF N = 0; WAIT 20:PRT "ORD.LAG.": T = 0: RET
80 IF N = 1 THEN 220
90 FOR I = 1 TO N-1
100 R = (2*I+1-X)*Q-I↑2*O
110 O = Q: Q = R
120 NEXT I
130 IF M = 0; WAIT 20: PRT "ORD.LAG.": T = R: RET
140 WAIT 20: PRT "ASS.LAG."
150 IF M = 1; T = (N*Q-N*N*O)/X: RET
160 S = R: T = (N*Q-N*N*O)/X
170 FOR J = 1 TO M-1
180 U = ((X-J)*T+(J-N-1)*S)/X
190 S = T: T = U
200 NEXT J
210 RET
```

```
220 IF M = 1; WAIT 20: PRT "ASS.LAG.": T = -1: RET
230 WAIT 20: PRT "ORD.LAG.": T = Q: RET
```

P3

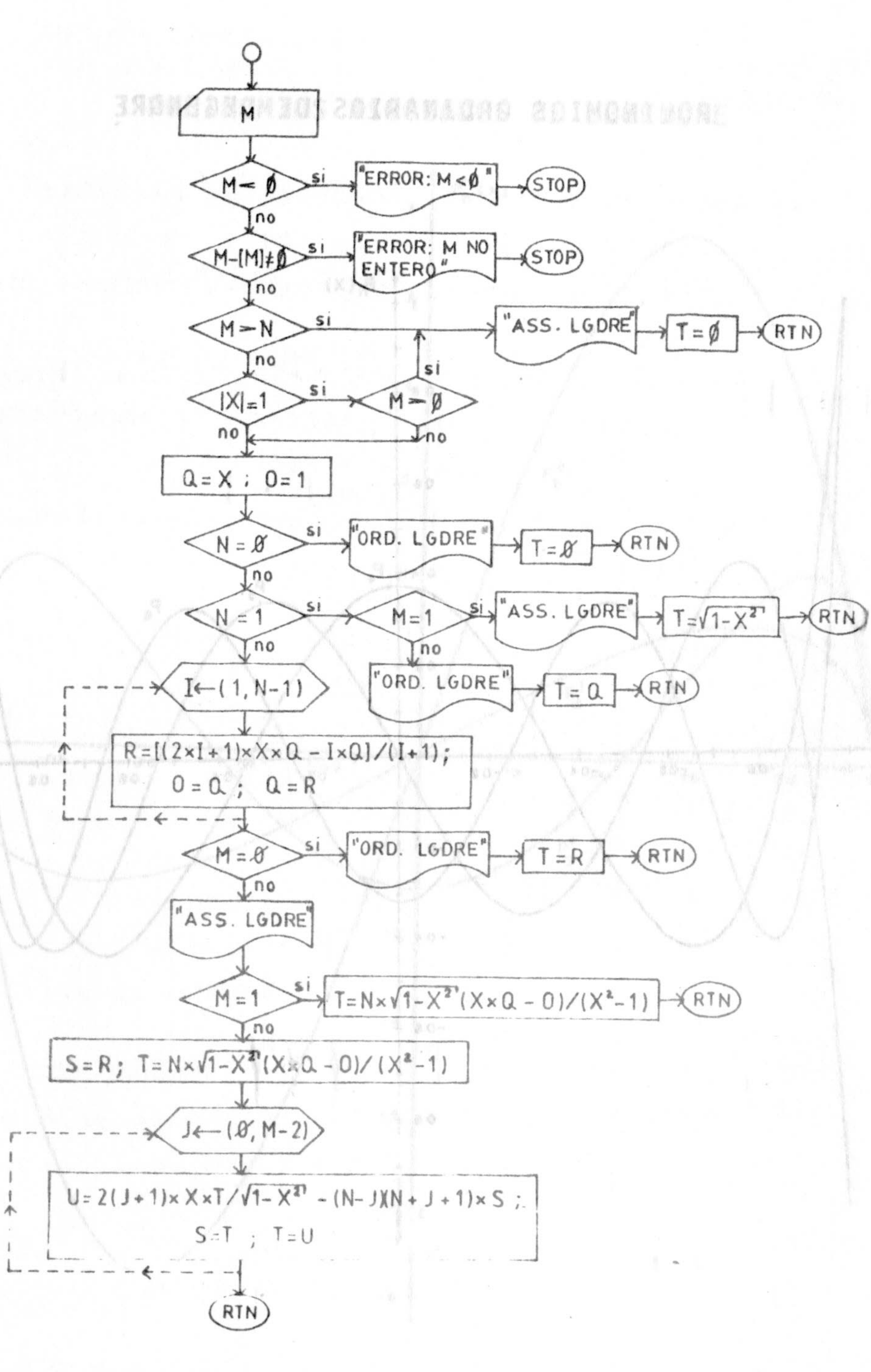
```
 5 Q = 2*X: 0 = 1
10 WAIT 20: PRT "HERMITE"
20 IF N = 0; R = 1: RET
30 IF N = 1; R = Q: RET
40 FOR I = 1 TO N-1
50 R = 2*X*Q-2*I*0
60 0 = Q: Q = R
70 NEXT I
80 RET
```

P4

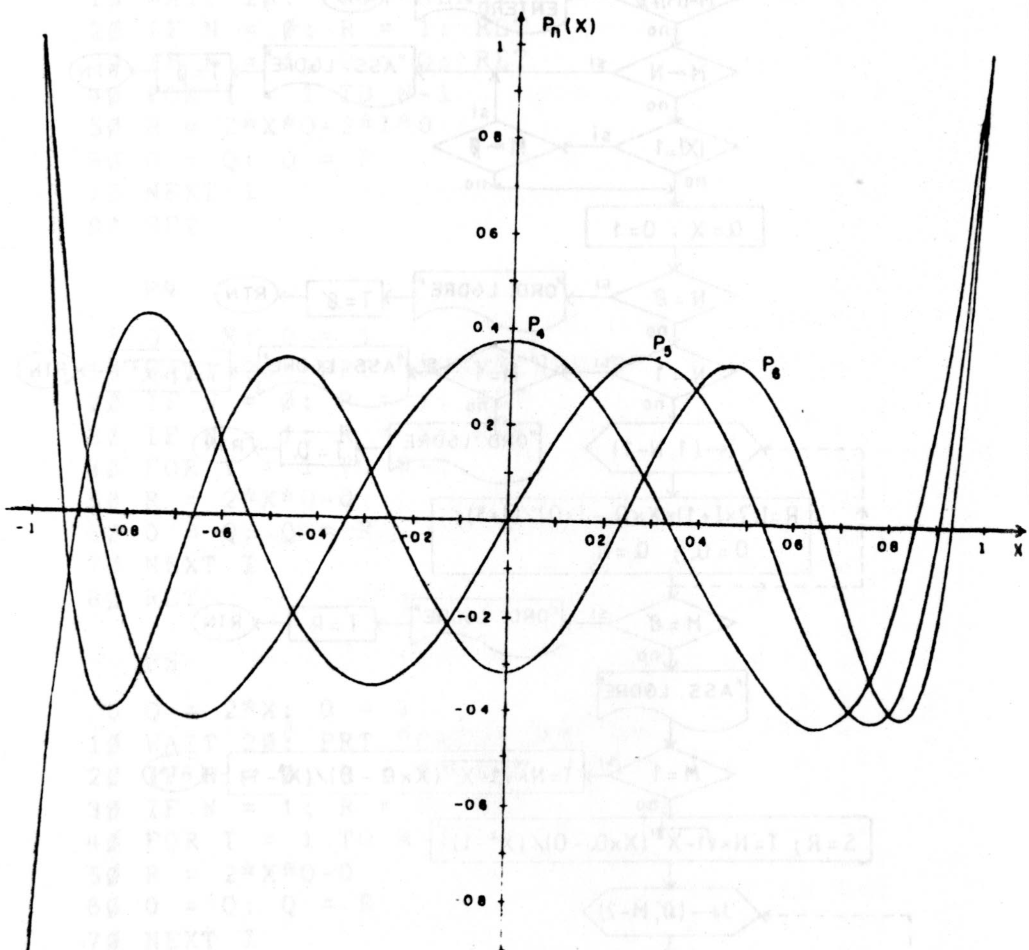
```
 5 Q = X: 0 = 1
10 WAIT 20: PRT "CHEVYCHEV T"
20 IF N = 0; R = 1: RET
30 IF N = 1; R = X: RET
40 FOR I = 1 TO N-1
50 R = 2*X*Q-0
60 0 = Q: Q = R
70 NEXT I
80 RET
```

P5

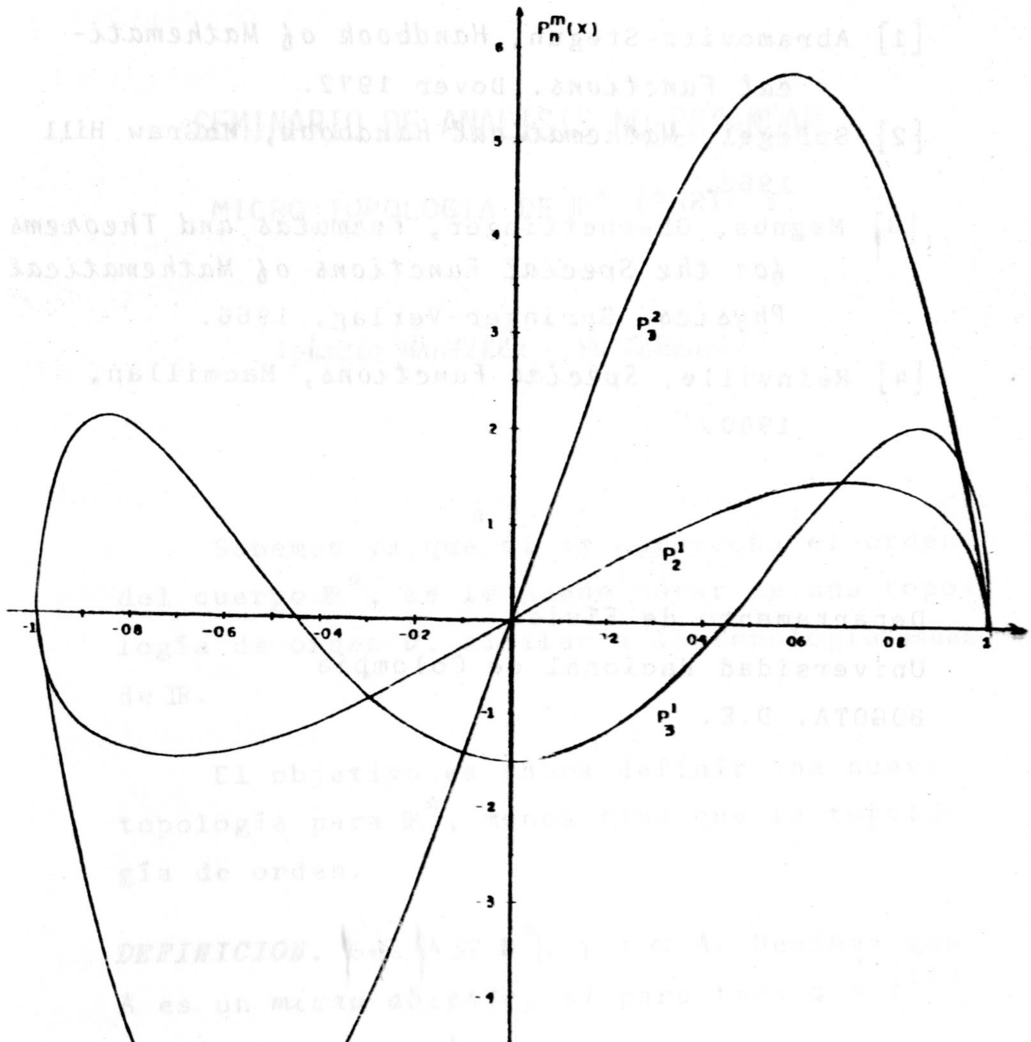
```
 5 Q = 2*X: 0 = 1
10 WAIT 20: PRT "CHEVYCHEV U"
20 IF N = 0; R = 1: RET
30 IF N = 1; R = Q: RET
40 FOR I = 1 TO N-1
50 R = 2*X*Q-0
60 0 = Q: Q = R
70 NEXT I
80 RET.
```


M
M < ∅
si
"ERROR: M<∅"
STOP
no
M-[M]≠∅
"ERROR: M NO ENTERO"
M > N
"ASS. LGDRE"
T=∅
RTN
|X|=1
M > ∅
Q=X ; O=1
N=∅
"ORD. LGDRE"
N=1
M=1
T=√1-X²
T=Q
I←(1,N-1)
R=[(2×I+1)×X×Q - I×O]/(I+1);
O=Q ; Q=R
M=∅
T=R
T=N×√1-X²(X×Q - O)/(X²-1)
S=R; T=N×√1-X²(X×Q - O)/(X²-1)
J←(∅,M-2)
U=2(J+1)×X×T/√1-X² - (N-J)(N+J+1)×S ;
S=T ; T=U

POLINOMIOS ORDINARIOS DE LEGENDRE



POLINOMIOS ASOCIADOS DE LEGENDRE



BIBLIOGRAFIA

[1] Abramovitz-Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover 1972.

[2] Spiegel, *Mathematical Handbook*, McGraw Hill 1968.

[3] Magnus, Oberhettinger, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, 1966.

[4] Rainville, *Special Functions*, Macmillan, 1960.

*

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E.