EL METODO DE ARQUIMEDES

Jesús Hernando Pérez

§1. INTRODUCCION.

Indagar por las fuentes que condujeron al Cálculo Diferencial e Integral significa entre otras cosas responder a la pregunta de cuál fue el aporte de los pensadores de la antigua Grecia al desarrollo de esta importante rama de la matemática. Es indudable que en los trabajos de aquellos primeros científicos aparecieron algunas de las ideas que posteriormente pasaron a formar parte de las teorías clásicas sobre la integración y la derivación de funciones. Digamos como mínimo que fueron ellos quienes plantearon algunos de los problemas cuyas soluciones se logran solamente con los métodos del Cálculo Diferencial e Integral, como es el caso de la determinación de longitudes, áreas, volúmenes y centros de gravedad.

Así por ejemplo el gran científico Arquímedes, sobresale dentro de los matemáticos de la antigua Grecia como alguien que enfrentó problemas cuyas soluciones, si bien constituyen hoy en día simples ejemplos en los cursos elementales de Cálculo, en su época estaban en las fronteras de la investigación. Este ingenioso matemático, logró determinar áreas, volúmenes y centros de gravedad de figuras, mediante procedimientos nada triviales; que aunque no se parecen mucho a los métodos utilizados hoy en día, están indudablemente relacionados.

En esta exposición haremos una presentación de los trabajos de Arquímedes que se relacionan en alguna forma con los problemas del Cálculo; sin la pretención naturalmente, de agotar todo lo que se pueda decir sobre este asunto. Para que la exposición sea de todas formas lo más completa posible, haremos antes un resumen de la evolución de algunas ideas de importancia para comprender el pensamiento arquimediano.

§2. *EUDOXIO DE CNIDO.*

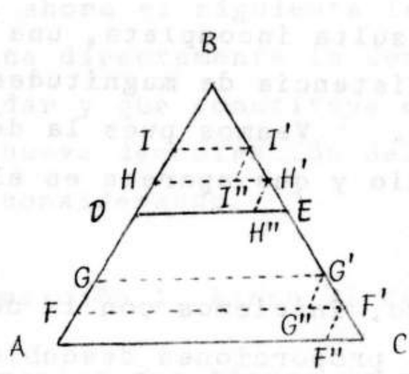
No cabe duda de que el descubrimiento de la inconmensurabilidad por los pitagóricos, planteó uno de los más grandes problemas a los matemáticos de la antigua Grecia. Este impase, significaba como lo muestra muy claramente el historiador Asger Aaboe (*) el derrumbe de la teoría de la semejanza de figuras cuyo desarrollo se iniciaba. Igualmente se derrumbaba toda la teoría de las magnitudes, pues la medición se basaba justamente en la conmensurabilidad. Para comprender el significado del aporte de Eudoxio, vale la pena retomar aquí algunos aspectos de la manera como evolucionó la teoría de la semejanza que fue reestablecida por este matemático de la escuela platónica.

Analicemos por ejemplo el siguiente teorema:

"Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará a los otros dos proporcionalmente".

Una demostración al estilo pitagórico de este teorema sería la siguiente:

(*) Matemáticas: Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo. Editorial Norma.



Supongamos que el segmento $\overline{DE}$ es paralelo al lado $\overline{AC}$ del triángulo ΔABC. Como cualquier par de magnitudes son conmensurables, podemos determinar un segmento $\overline{XY}$ de tal manera que $\overline{AD} = m\,\overline{XY}$ $= \overline{AF} + \overline{FG} + \ldots$ y $\overline{DB} = n\overline{XY} = \overline{DH} + \overline{HI} + \ldots$; donde los puntos $F, G, \ldots$; $H, I, \ldots$ son tales que

$$\overline{AF} = \overline{FG} = \ldots = \overline{XY} = \overline{DH} = \overline{HI} = \ldots$$

Tracemos ahora por cada uno de estos puntos, paralelas al lado $\overline{AC}$ y llamemos $F', G', \ldots$; $H', I', \ldots$ los puntos de corte de estas paralelas con el lado $\overline{BC}$. Construyamos finalmente por estos últimos puntos, paralelas al lado $\overline{AB}$. Los triángulos que resultan $\Delta F'F''C$, $\Delta G'G''F', \ldots$; $\Delta H'H''E$, $\Delta I'I''H', \ldots$ son todos congruentes y en consecuencia los segmentos $\overline{CF'}$, $\overline{F'G'}, \ldots$; $\overline{EH'}$, $\overline{H'I'}, \ldots$ son congruentes, lo cual quiere decir que $\overline{CE} = m\overline{XY}$ y $\overline{EB} = n\overline{XY}$ lo cual prueba el teorema.

Esta prueba resulta incompleta, una vez que se descubre la existencia de magnitudes que no son conmensurables. Veamos pues la demostración dada por Eudoxio y que aparece en el libro VI de Euclides.

Ante todo, iniciemos con la definición de igualdad entre proporciones descubierta por Eudoxio y que aparece como la definición 5 del libro V de Euclides.

"5. Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o, menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor igual o menor que el de la cuarta"(*).

En símbolos modernos tendríamos

$$a/b = c/d \iff \forall m,n \in \mathbb{N}^+ \quad ma \gtreqless nb$$

si y sólo si $mc \gtreqless nd$.

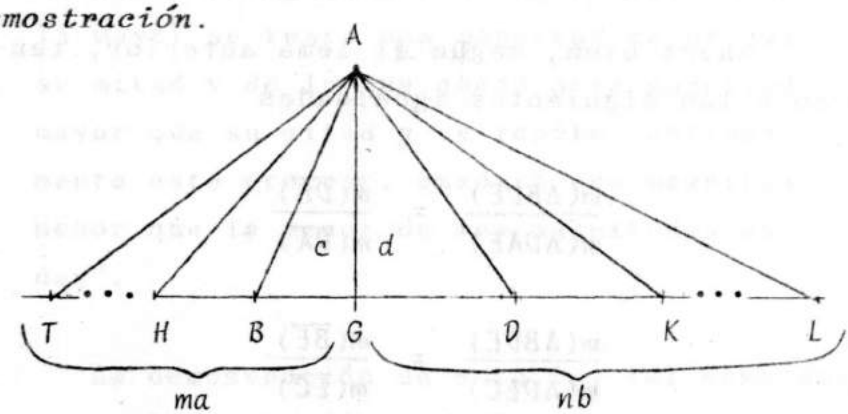
(*) Científicos griegos. Tomo I. Aguilar, Edición a cargo de Francisco Vera.

Veamos ahora el siguiente lema, en el cual se aplica directamente la definición que acabamos de dar y que constituye el paso previo para la nueva demostración del teorema que estamos considerando.

LEMA. (Proposición 1, Libro VI de Euclides).

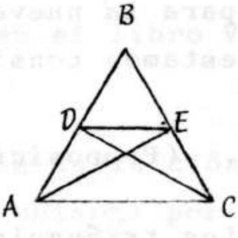
"Los triángulos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases"

Demostración.



Consideremos los triángulos ΔABG y ΔAGD llamemos respectivamente c, d sus magnitudes. Llamemos también y respectivamente a, b las magnitudes de las bases. Queremos demostrar que $a/b = c/d$ y para ello, tomamos m, n números naturales. La condición $ma \gtreqless nb$ si y sólo si $mc \gtreqless nd$ resulta evidente de la figura dado que la magnitud mc por ejemplo, es la del triángulo cuya base es ma.

Demostración del Teorema.



Suponiendo que el segmento $\overleftrightarrow{DE}$ es paralelo al segmento $\overleftrightarrow{AC}$, los triángulos ΔADE y ΔCDE tienen la misma magnitud pues considerando $\overleftrightarrow{DE}$ como la base común, ellos tendrán la misma altura.

Ahora bien, según el lema anterior, tendremos las siguientes igualdades

$$\frac{m(\Delta BDE)}{m(\Delta DAE)} = \frac{m(\overleftrightarrow{DB})}{m(\overleftrightarrow{DA})}$$

$$\frac{m(\Delta BDE)}{m(\Delta DEC)} = \frac{m(\overleftrightarrow{BE})}{m(\overleftrightarrow{EC})}$$

De estas relaciones se obtiene la siguiente

$$\frac{m(\overleftrightarrow{DB})}{m(\overleftrightarrow{DA})} = \frac{m(\overleftrightarrow{BE})}{m(\overleftrightarrow{EC})}$$

puesto que $m(\Delta DAE) = m(\Delta DEC)$ y en esta forma, se tiene el teorema.

Debemos también a Eudoxio, la introducción del método de exhaución utilizado ampliamente por Euclides y Arquímedes. Con la ayuda de este método, fue posible la determinación del área del círculo, probablemente por el propio Eudoxio y de la longitud de la circunferencia por Arquímedes.

En la versión de Euclides (Libro X, proposición 1) el principio es como sigue:

> "1. Dadas dos magnitudes desigualdes, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas".

La demostración de esta ley tal como aparece en el propio libro de Euclides, se sigue del principio conocido posteriormente con el nombre de "principio de Arquímedes".

En efecto, llamemos G a la magnitud menor, H a la mayor y tomemos un natural N tal que $(N+1)G$ sea mayor que H. Consideremos ahora

$$H_0 = H, \ H_1 < \frac{1}{2} H_0, \ldots, H_{n+1} < \frac{1}{2} H_n, \ldots$$

y veamos que $G > H_N$.

De la relación

$$H_0 = H < (N+1)G$$

se sigue $H_1 < NG$

pues hemos restado a la magnitud de la derecha otra menor que su mitad y a la de la izquierda, una mayor que su mitad.

Por la misma razón, se sigue que

$$H_2 < (N-1)G$$

y continuando en esta forma llegaremos a la relación

$$H_N < (N-(N-1))G = G .$$

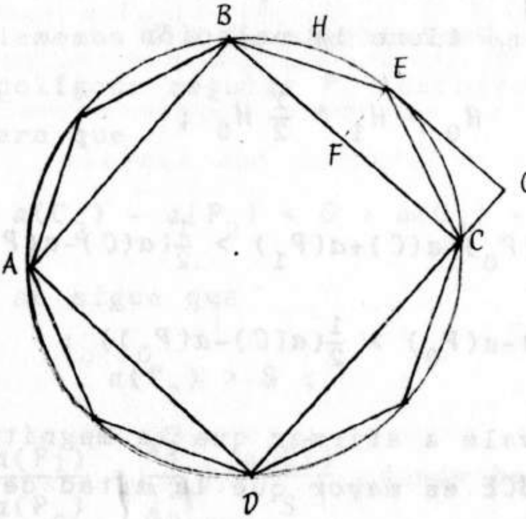
A manera de ilustración, veamos la prueba del teorema sobre el área del círculo, tal como aparece también en el libro de Euclides.

LEMA. Dada una magnitud cualquiera G, existe para un círculo C dado, un polígono regular P inscrito en C y tal que

$$a(C - P) < G$$

Demostración. Construímos en primer lugar el cuadrado $P_0 = ABCD$ inscrito en C y llamamos H_0 a la magnitud $a(C-P_0) = a(C) - a(P_0)$.

Construyamos ahora sucesivamente los polígonos regulares $P_1, P_2, \ldots$ como se indica en la figura, de tal manera que cada uno de ellos es-



té inscrito en C, P_{n+1} sea mayor que P_n y el número de lados de P_n sea igual a 2^{n+2}.

Si llamamos H_n a la magnitud $a(C-P_n)$ =

$a(C) - a(P_n)$, tendremos la relación

$$H_n - H_{n+1} > \frac{1}{2} H_n$$

para todo n, con lo cual según el principio de exhaución, para algún n se tendrá que

$$H_n = a(C - P_n) < G.$$

Para establecer la relación $H_n - H_{n+1} > \frac{1}{2} H_n$ basta establecerla en el primer caso, pues el principio de construcción del polígono P_{n+1} a partir del P_n es el mismo para todo $n \geqslant 0$. Veamos pues que se tiene la relación

$$H_0 - H_1 > \frac{1}{2} H_0 ;$$

o sea

$$a(C)-a(P_0)-a(C)+a(P_1) > \frac{1}{2}(a(C)-a(P_0)) ;$$

$$a(P_1)-a(P_0) > \frac{1}{2}(a(C)-a(P_0)) ;$$

lo cual equivale a afirmar que la magnitud del triángulo ΔBCE es mayor que la mitad de la magnitud del sector circular $BHEC$ lo cual es una trivialidad.

TEOREMA. Los círculos son entre sí como los cua drados de sus radios.

Demostración. Consideremos los círculos C_1 y C_2 de radios respectivamente r_1 y r_2.

a) Supongamos que

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

o sea,

$$a(C_2) > \frac{a(C_1) r_2^2}{r_1^2} = S.$$

Llamemos G a la magnitud $a(C_2)$-S y consideremos el polígono regular P_2 inscrito en C_2 y de tal manera que

$$a(C_2) - a(P_2) < G = a(C_2) - S$$

De esto se sigue que

$$a(P_2) > S \ ;$$

pero, $\dfrac{a(P_1)}{a(P_2)} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2} = \dfrac{a(C_1)}{S}$ donde hemos llamado P_1 al polígono regular inscrito en C_1 y semejante a P_2.

Como $a(C_1) > a(P_1)$, tendremos que $a(P_2) < S$;

lo cual contradice una afirmación anterior.

b) En forma análoga puede probarse que la relación

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

no es posible.

c) Concluiremos entonces que

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

El método de exhaución permite también la demostración de otras ralaciones entre los volúmenes de sólidos que estan en cierta relación en términos de relaciones más simples.

§3. *ARQUIMEDES.*

La obra de este extraordinario matemático es muy amplia y sólo nos interesaremos aquí en algunos de sus aportes a la teoría de las magnitudes geométricas. Arquímedes como todo el mundo sabe, es el fundador de la Estática o teoría de los cuerpos en equilibrio, la cual utilizó para sus descubrimientos en la teoría de las magnitudes. De la Estática, surge el interés por determinar los centros de gravedad o centros de equilibrio de las figuras; problemas que como todos sabemos, se resuelven modernamente con métodos del Cálculo Integral. Resulta extraordinariamente interesante la forma como Arquímedes integró las diferentes áreas del conocimiento que le interesaron, aplicando los métodos o resultados de una al descubrimiento de leyes o relaciones en otra. En la Estática, aplicó el método axiomático de la Geometría y, como veremos con un ejemplo, utilizó la Estática para obtener numerosos resultados sobre áreas y volúmenes.

La influencia de Arquímedes en el desarrollo del Cálculo aunque indudable, es difícil de precisar pues su obra más revolucionaria conocida con el nombre de "El Método" permaneció perdida hasta el año de 1906 cuando el historiador Johann Ludwing Heiberg la descubrió en un palimpsesto de la biblioteca de Constantinopla. El Método fue escrito por Arquímedes con el propósito de explicar el procedimiento mecánico utilizado por él para la solución de problemas matemáticos. En los otros tratados de Arquímedes, se enuncian y demuestran teoremas que sorprendieron a los expertos de su tiempo como el relativo a la magnitud ó volumen de la esfera, del cual el propio Arquímedes estaba muy orgulloso y no faltó quien indagara acerca de su forma de llegar a estos resultados. En la nota remisoria de su trabajo a Eratóstenes, Arquímedes explica lo siguiente:

"..., como sé que eres un estudioso serio, hombre de eminente cultura filosófica y un apasionado, he creído conveniente exponerte por escrito y explicar con detalle en este mismo libro la naturaleza especial de cierto método que te permitirá resolver mecánicamente algunos problemas matemáticos. Estoy convencido de que este procedimiento no es menos útil incluso para demostrar los propios teoremas, algunos de los cuales, evidentes por medio de la Mecánica, se han demostrado después geométricamente porque su investigación por dicho método no proporcionó una demostración rigurosa. Pero cuando gracias a él hemos adquirido algún conocimiento previo de la cuestión, es naturalmente más fácil dar la prueba que encontrarla sin dicho conocimiento previo"(*).

Antes de explicar el ejemplo que nos ilustrará sobre el método de Arquímedes, conviene mostrar un ejemplo en el cual él utiliza el método de exhaución. Se trata justamente de la determinación de la longitud de la circunferencia, que aparece en el trabajo conocido con el nombre de "Medida del círculo".

"1. Un círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales al radio y a la circunferencia del círculo".

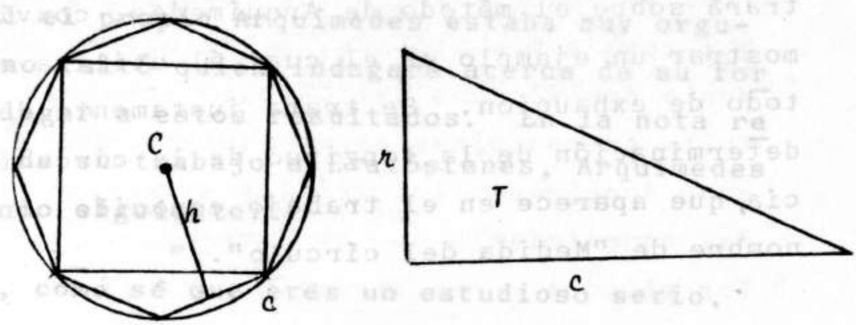
Demostración. Si suponemos que la magnitud del círculo C es mayor que la del triángulo T según el principio de exhaución, existe un polígono inscrito a la circunferencia cuya magnitud es mayor que la del triángulo.

Pero, esto resulta contradictorio pues la magnitud del polígono es la mitad de su perímetro multiplicada por su altura y estas son evidentemente menores que la circunferencia y el

(*) Científicos griegos. Tomo II. Aguilar. Edición a cargo de Francisco Vera.

radio.

En forma dual, si la magnitud de T es mayor que la de C, determinamos un polígono regu-



lar circunscrito a la circunferencia y cuya magnitud sea menor que la de T. Pero, una vez más, esto resulta contradictorio.

Este teorema implica la determinación de la longitud de la circunferencia; pues, si expresamos numéricamente este teorema y los del libro de Euclides, tendremos lo siguiente:

i) Llamemos π a la magnitud de un círculo de radio unidad. En tal caso, la magnitud C de un círculo de radio R sería

$$\frac{C}{\pi} = \frac{R^2}{1^2}$$

o sea

$$C = \pi R^2$$

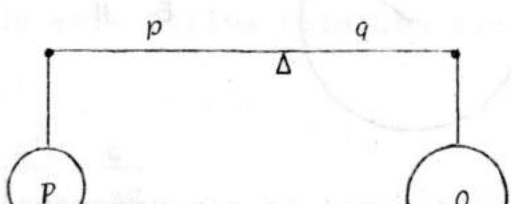
ii) Si la magnitud de un triángulo, se determina mediante la relación $\frac{1}{2}\,bh$ (b magnitud de la base y h magnitud de la altura) entonces, según el teorema de Arquímedes, tendríamos:

$$\pi R^2 = \frac{1}{2}\,Rc$$

y en consecuencia

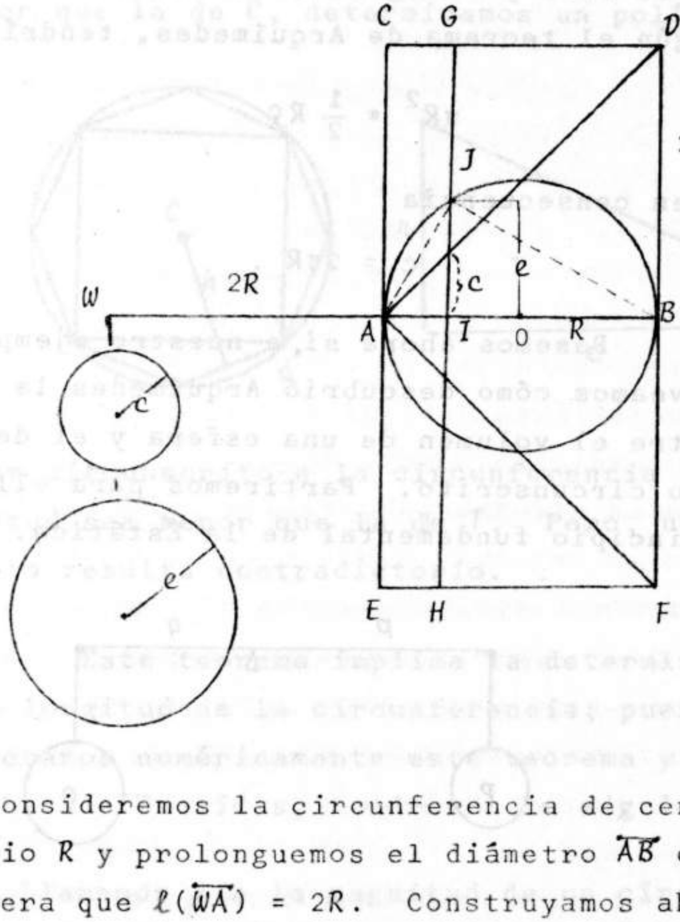
$$c = 2\pi R\ .$$

Pasemos ahora si, a nuestro ejemplo central, y veamos cómo descubrió Arquímedes la relación entre el volumen de una esfera y el del cilindro circunscrito. Partiremos para ello del principio fundamental de la Estática.



Si los cuerpos P, Q se encuentran equilibrados en la balanza, entonces se tendrá la relación

$$P\cdot p = Q\cdot q$$



Consideremos la circunferencia de centro O y radio R y prolonguemos el diámetro $\overleftrightarrow{AB}$ de tal manera que $\ell(\overleftrightarrow{WA}) = 2R$. Construyamos ahora el rectángulo $CDEF$ de manera tal que $\ell(\overleftrightarrow{EF}) = 2R = \ell(\overleftrightarrow{BF})$ y giremos ahora esta figura alrededor de $\overleftrightarrow{WB}$, 180°; con lo cual, la circunferencia nos determinará una esfera, el rectángulo $CDEF$ un cilindro y el triángulo ΔADF un cono.

Si consideramos una línea cualquiera $\overline{GH}$ paralela a $\overleftrightarrow{CE}$, al girar la figura, esta línea determinará un círculo que cortará a la esfera y al cono en otros círculos de radios respectivamente e y c.

De la figura, es fácil deducir las siguientes relaciones

$$\ell(\overline{AI}) = c$$

$$\ell(\overline{AJ})^2 = c.2R$$

$$c^2 + e^2 = \ell(\overline{AJ})^2$$

$$c^2 + e^2 = c.2R.$$

Dividiendo esta última relación por $(2R)^2$ tendremos

$$\frac{c^2 + e^2}{(2R)^2} = \frac{c}{2R}$$

Si multiplicamos ahora la proporción de la izquierda por π, tendremos

$$\frac{\pi c^2 + \pi e^2}{\pi(2R)^2} = \frac{c}{2R}$$

o sea

$$(\pi c^2 + \pi e^2)\cdot 2R = \pi(2R)^2\cdot c \qquad (*)$$

Si miramos esta última identidad como una relación de equilibrio y si aceptamos que las áreas, y los volúmenes tienen pesos iguales ó proporcionales a sus magnitudes, podemos entonces llevar los círculos de radios e y c al punto W con lo cual, tomando como centro de equilibrio el punto A, los círculos correspondientes a la esfera y al cono, equilibrarán al del cilindro tal como lo indica la relación (*). Haciendo recorrer ahora el segmento $\overline{GH}$ todo el rectángulo $CDEF$ y llevando al punto W todos y cada uno de los círculos de la esfera y el cono, tendremos allí a estos dos sólidos y la condición de equilibrio nos dará la siguiente relación

$$(\mathit{Cono} + \mathit{Esfera})\cdot 2R = \mathit{Cilindro}\cdot R$$

o sea

$$\mathit{Esfera} = \frac{1}{2}\,\mathit{Cono}$$

puesto que

$$\mathit{Cilindro} = 3\cdot \mathit{Cono}.$$

Empleando las fórmulas modernas podemos determinar el volumen de la esfera, pues el volumen del cono es igual a

$$\frac{1}{3}\,\pi(2R)^2(2R) = \frac{8}{3}\,\pi R^3$$

y en consecuencia

$$\textit{Volumen de la esfera} = \frac{3}{4}\pi R^3.$$

Para una información más completa, consúltense además de los libros mencionados el siguiente trabajo:

Edwards, C.H., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag. 1979.

* *