Boletín de Matemáticas
Vol. XVII Nº 1,2,3 (1983) ***APUNTES DE SEMINARIO***

UNA EXTENSION DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE ROTHE

Darío López G.

Las presentes notas, debidas a Potter (1973), han sido el resultado de varias lecturas realizadas durante un seminario llevado a cabo bajo la dirección de la profesora Lucimar Nova G.

RESUMEN.

Rothe en 1937 probó el siguiente resultado: "*Sea B un espacio de Banach, M la bola unitaria cerrada en B. Si $T: M \to B$ es una aplicación continua y compacta tal que $T(\partial M) \subseteq M$, entonces T tiene un punto fijo*". El propósito es generalizar este resultado a subconjuntos convexos y cerrados arbitrarios de B.

ALGUNAS DEFINICIONES Y RESULTADOS USADOS.

DEFINICION 1. Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $T: A \to X$; decimos que T es una *aplicación compacta* si $T(A)$ está contenido en algún subconjunto compacto de X.

TEOREMA 1. (Teorema de Schauder 1930).
Sean B un espacio normado, M un subconjunto no vacío y convexo de B. Si $T: M \to M$ es contínua y compacta, entonces T tiene un punto fijo [6].

DEFINICION 2. Sean X un espacio topológico, $Y \subseteq X$. Decimos que *Y es un retracto de X* si existe una aplicación contínua $r: X \to Y$, tal que $r|_Y = id_Y$. (r se llama una retracción).

LEMA 1. Sean B un espacio normado y, $M = \{x \in B \mid \|x\| \leqslant n\}$. Si $r: B \to M$ está definida por:

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in M \\ \dfrac{nx}{\|x\|}, & \text{si } x \notin M. \end{cases}$$

Entonces

(1) r es una retracción de B en M

(r se denomina retracción radial).

(ii) Si $r(x) \in \mathring{M}$, entonces $r(x) = x$.

(iii) Si $x \notin M$, entonces $r(x) \in \partial(M)$.

LEMA 2. Sean A un conjunto, X, Y espacios topológicos. Si $T: A \to X$ es compacta y $r: X \to Y$ es contínua entonces $r \circ T: A \to Y$ es compacta.

LEMA 3. Sean B un espacio normado y M un subconjunto convexo y cerrado de B tal que $0 \in \mathring{M}$. El funcional de Minkowski $g: B \to \mathbb{R}$ definido por

$$g(x) = Inf\{c > 0 \mid x \in cM\}$$

es una aplicación contínua que además cumple:

(i) $g(cx) = cg(x)$ para $c \geq 0$,

(ii) $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$,

(iii) $0 \leq g(x) < 1$, si $x \in \mathring{M}$

(iv) $g(x) > 1$, si $x \notin M$

(v) $g(x) = 1$ si $x \in \partial M$.

(ver [4] y [5]).

DESARROLLO DEL TEMA:

TEOREMA DE POTTER. (1973).

Sean B un espacio de Banach y M un subconjunto convexo y cerrado de B. Si $T:M \to B$ es una aplicación contínua y compacta tal que $T(\partial M) \subseteq M$, entonces T tiene un punto fijo.

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $0 \in \mathring{M}$, pues en caso contrario, escogiendo $x_0 \in \mathring{M}$.

Definimos $T : M-x_0 \to B$ por $T(x-x_0) = Tx-x_0$ la cual satisface las hipótesis del teorema y $0 \in \widehat{M-x_0}^{\circ}$. Considerando $g: B \to \mathbb{R}$ el funcional de Minkowski de M y $r: B \to M$ definida por

$$r(x) = \frac{x}{max(1, g(x))} .$$

r es una retracción radial.

En efecto:

(i) r es contínua pues el máximo de funciones contínuas es contínua. Además si $x \in M$ $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ luego $r(x) = x$.

(ii) Si $r(x) \in \mathring{M}$ y $r(x) \neq x$, entonces

$r(x) = \dfrac{x}{g(x)}$ y $g(r(x)) = 1$, luego $r(x) \in \partial M$ (absurdo) por tanto $r(x) = x$.

(iii) Si $x \notin M$. Por la parte anterior $r(x) \in \partial M$.

Luego tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "T", "\text{contínua compacta}"'] \arrow[dr, bend right, "r\circ T"', "\text{contínua compacta}"] & B \arrow[d, "r\ \text{contínua}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

$r\circ T\colon M \to M$ es una aplicación contínua y compacta definida sobre un convexo, no vacío de un espacio normado, luego por el Teorema de Schauder, $r\circ T$ tiene un punto fijo: y.

Si $y \in \partial M$ como $T(\partial M) \subseteq M$ y r es una retracción, entonces $y = r(Ty) = Ty$.

Si $y \in \mathring{M}$ entonces $y = r(Ty) \in \mathring{M}$ y así por (ii)

$$r(Ty) = Ty$$

Nótese que la prueba se hizo bajo la hipótesis $\mathring{M} \neq \emptyset$. En caso de que $\mathring{M} = \emptyset$ entonces $M = \partial M$

y como $T(\partial M) \subseteq M = \partial M$; el teorema se reduciría al Teorema de Schauder.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Schwartz, N.D., *Linear Operators*, New York Interscience publishers, 1957.

[2] Eggleston, H., *Convexity*, Cambridge, University Press 1966.

[3] Kreyszig, E., *Introduction to Functional Analysis with applications*, New York, John Wiley, 1978.

[4] Cotlas, M. y Cignoli, R., *Nociones de Espacios normados*. Editorial Universita de Buenos Aires, 1967.

[5] Rudin, W., (1921). *Análisis Funcional*, Barcelona, Revertê, 1979.

[6] Smart, D.R., *Fixed Point Theorems*, Cambridge Tracts in Mathematics 66, Cambridge University Press, London 1974.

[7] Taylor, A.E., (1911), *Introduction to Functional Analysis*, New York, John Wiley, 1958.

[8] Wilanski, A., *Topics in Functional Analysis*, New York, Springer Verlag, 1967.

[9] Yosida, K., (1909), *Functional Analysis*, 4 ed. Berlin, Springer, 1974.

* *