Boletín de Matemáticas
Vol. XVII No. 1,2,3 (1983) **APUNTES**

SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL HIPERGEOMETRICA

Gladys Villamarín

El propósito de este artículo es dar a conocer detalladamente las dos soluciones que forman un conjunto fundamental para la ecuación diferencial hipergeométrica y expresar algunas funciones utilizando esta serie. Esta ecuación diferencial es de gran interés teórico. Comenzaré haciendo una brevísima introducción histórica.

El estudio de funciones especiales, uno de los temas apasionantes en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales de la segunda mitad del siglo XIX, se originó en la necesidad de dar solución por medio de series de potencias a ecuaciones diferenciales ordinarias. Es tas funciones especiales fueron introducidas por Gauss en un escrito famoso de 1812 sobre series hipergeométricas.

La ecuación diferencial hipergeométrica

$$x(1-x)y'' + (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0$$

y la serie solución

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1\cdot 2\ldots(n+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}x^{n+1} + \ldots \text{ donde } |x| < 1,$$

denominada serie hipergeométrica por Gauss ya había sido estudiada por Euler. Gauss anotó que para valores especiales de α,β y γ la serie inducía casi todas las funciones trascendentales, las funciones de Bessel y las esféricas entre otras.

Para demostrar algunas propiedades de la serie, Gauss estableció la famosa relación

$$F(\alpha,\beta,\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

A Gauss también se debe la demostración de la convergencia de la serie.

ECUACION DIFERENCIAL Y SERIE HIPERGEOMETRICA.

Se observa una ecuación diferencial de la forma:

$$(x^2+ax+b)\frac{d^2y}{dx^2} + (cx+d)\frac{dy}{dx} + ey = 0 \qquad (1)$$

a, b, c, d, e reales.

Para lograr el objetivo planteado se consideran dos raíces reales y diferentes x_1, x_2 de la ecuación de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Considerando lo anterior, la ecuación (1) toma la forma:

$$(x-x_1)(x-x_2)y'' + (cx+d)y' + ey = 0 \qquad (2)$$

Se transforma luego la variable independiente de tal forma que el coeficiente de y'' sea 0 para $x = 0$ y $x = 1$. Con este propósito se introduce una nueva variable z, relacionada con x, x_1 y x_2 por medio de la ecuación

$$x = x_1 - z(x_1-x_2),$$

o sea

$$z = \frac{x_1}{x_1 - x_2} - \frac{x}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x_1 - x_2} \qquad (3)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} \cdot \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} \qquad (4)$$

Ahora

$$x - x_1 = - z(x_1 - x_2)$$

$$x - x_2 = x_1 - x_2 - z(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(1 - z) \qquad (5)$$

Se reemplazan (3), (4) y (5) en (2), para obtener

$$z(1-z)\frac{d^2 y}{dz^2} \left[\frac{c x_1 + d}{x_1 - x_2} - cz\right]\frac{dy}{dz} - ey = 0 \qquad (6)$$

y se emplean las substituciones

$$\frac{c x_1 + d}{x_1 - x_2} = \gamma, \quad c = \alpha+\beta+1, \quad e = \alpha\beta, \quad z = x$$

Con esto (6) toma la forma:

$$x(1-x)\frac{d^2 y}{dx^2} \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)x\right]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \qquad (7)$$

conocida en la literatura como "ecuación diferencial hipergeométrica", la cual depende de los parámetros α, β y γ.

La solución de esta ecuación diferencial es una serie de potencias de x, que recibe el nombre de serie hipergeométrica.

Utilizando el método de Frobenius, esbozo a continuación la solución de (7).

Sea

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^{\rho+i}, \quad y' = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (\rho+i) x^{\rho+i-1}, \tag{8}$$

$$y'' = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (\rho+i)(\rho+i-1) x^{\rho+i-2}$$

Reemplazando (8) en (7) se obtiene:

$$(x-x^2) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (\rho+i)(\rho+i-1) x^{\rho+i-2}$$

$$+ [\gamma-(\alpha+\beta+1)x] \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (\rho+i) x^{\rho+i-1} - \alpha\beta \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^{\rho+i} = 0$$

El menor exponente de x para este desarrollo es $\rho-1$ y el coeficiente de $x^{\rho-1}$ es,

$$\rho(\rho-1)\alpha_o + \gamma\rho\alpha_o ,$$

el cual es igual a 0.

Sin perder generalidad se puede suponer

$\alpha_0 \neq 0$, obteniendo la siguiente ecuación cuadrá tica para ρ:

$$\rho(\rho-1) + \gamma\rho = 0 \rightarrow \rho(\rho-1+\gamma) = 0.$$

Las dos raíces de esta ecuación son:

$$\rho_1 = 0 \quad y \quad \rho_2 = 1 - \gamma$$

Para $\rho_1 = 0$, y, y' y y'' tiene la siguiente forma:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i, \quad y' = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i i x^{i-1}, \quad y'' = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i i(i-1)x^{i-2} \tag{9}$$

Se reemplaza (9) en (7) para obtener el tér mino

$$\gamma\alpha_1 - \alpha\beta\alpha_0 = 0$$

Si $\gamma \neq 0$, entonces,

$$\alpha_1 = \frac{\alpha\,\beta}{1\cdot\gamma}\,\alpha_0$$

es el coeficiente de x.

Para obtener el coeficiente de x^2 procedemos así:

$$2\alpha_2 + 2\gamma\alpha_2 - (\alpha+\beta+1)\alpha_1 - \alpha\beta\alpha_1 = 0$$

$$2(1+\gamma)\alpha_2 = (\alpha+1)(\beta+1)\alpha_1 \ ;$$

$$\alpha_2 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2.(\gamma+1)}\ \alpha_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\alpha_0 ,$$

$$\gamma \neq -1.$$

Siguiendo la misma técnica para el coeficiente de x^{n+1} se obtiene:

$$(n+1)n\alpha_{n+1} - n(n-1)\alpha_n + \gamma(n+1)\alpha_{n+1} - (\alpha+\beta+1)n\alpha_n - \alpha\beta\alpha n = 0$$

$$(n+1)(\gamma+n)\alpha_{n+1} - (\alpha+n)(\beta+n)\alpha_n = 0, \quad \gamma \neq 0,-1,-2,\dots,-n$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\ \alpha_n$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\beta+n)(\beta+n-1)}{(n+1)n(\gamma+n)(\gamma+n-1)}\ \alpha_{n-1} = \dots =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{1.2\dots(n+1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)}\ \alpha_0$$

Se puede dar a α_0 el valor 1, para obtener la serie

$$1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{1.2\dots(n+1)\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)}x^{n+1} + \dots$$

Solución particular de la ecuación (7), conocida como la "Serie hipergeométrica" y que se nota $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$. Esta serie es convergente para $|x| < 1$, hecho que se comprueba fácilmente utilizando el criterio del cociente, además es uniformemente convergente y derivable término a término en este mismo intervalo.

Una solución particular de (7) es $y_1 = F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ para $\gamma \neq 0$, $\gamma \notin \mathbb{Z}^-$.

Expongo a continuación dos procedimientos para obtener la segunda solución particular de (7).

Para el primero se procede así:

En (8) se toma $\rho = 1 - \gamma$

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^{(1-\gamma+i)}, \quad y' = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (1-\gamma+i) x^{i-\gamma},$$

$$y'' = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1-\gamma)(i-\gamma) x^{i-\gamma-1},$$

reemplazando estas expresiones en (7) se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (1+i-\gamma)(i-\gamma) x^{i-\gamma} - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (1+i-\gamma)(i-\gamma) x^{i-\gamma+1} +$$

$$+ \gamma \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma+i)\alpha_i x^{i-\gamma} - (\alpha+\beta+1) \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma+i)\alpha_i x^{1-\gamma+i} -$$

$$\alpha\beta \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^{1-\gamma+i} = 0.$$

Se puede observar que el menor exponente de x es $1-\gamma$. Como todos los coeficientes de las potencias de x son cero, podemos obtener los α_i así:

$$\alpha_1 \left[(2-\gamma)(1-\gamma) + \gamma(2-\gamma)\right] + \alpha_0 \left[(1-\gamma)\gamma - \right.$$

$$\left. - (\alpha+\beta+1)(1-\gamma) - \alpha\beta\right] = 0.$$

$$\alpha_1 = \frac{(1-\gamma)\left[(\alpha+\beta+1)-\gamma\right]+\alpha\beta}{(2-\gamma)(1-\gamma+\gamma)} \alpha_0$$

$$\alpha_1 = \frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)}{1(2-\gamma)} \alpha_0$$

Tomando el coeficiente de $x^{2-\gamma}$ se obtiene:

$$\alpha_2 \left[(3-\gamma)(2-\gamma)+\gamma(3-\gamma)\right] - \alpha_1\left[(2-\gamma)(1-\gamma)+(2-\gamma)(\alpha+\beta+1)+\alpha\beta\right]$$

$$\alpha_2 = \frac{\left[(2-\gamma)(1-\gamma)+(2-\gamma)(\alpha+\beta+1)+\beta\alpha\right]}{(3-\gamma)(2-\gamma+\gamma)} \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)(\beta+2-\gamma)}{1.2.(2-\gamma)(3-\gamma)} \alpha_0 .$$

Observando la ley de formación de los α_i se ve que el coeficiente α_n es

$$\alpha_n = \frac{(\alpha+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)\ldots(\alpha+n-\gamma)(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)\ldots(\beta+n-\gamma)}{1.2\ldots n(2-\gamma)(3-\gamma)\ldots(n+1-\gamma)} \alpha_0$$

$\gamma \neq 2, 3, \ldots$

Se puede considerar $\alpha_0 = 1$ obteniendo para y la serie convergente

$$y = x^{1-\gamma}\left(1 + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)}{1.(2-\gamma)}x + \frac{(\alpha+1-\gamma)(\alpha+2-\gamma)(\beta+1-\gamma)(\beta+2-\gamma)}{1.2.(2-\gamma)(3-\gamma)}x^2 + \ldots\right)$$

Asi que $y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma; x)$.

Un segundo método para obtener la solución anterior es el siguiente.

Se introduce una nueva función w y se emplea la substución

$$y = x^{1-\gamma}w,$$

se calculan y', y'' y se reemplazan estos valores en (7):

$$y' = x^{1-\gamma}w' + (1-\gamma)x^{-\gamma}w;$$

$$y'' = 2(1-\gamma)x^{-\gamma}w' + x^{1-\gamma}w'' - \gamma(1-\gamma)x^{-\gamma-1}w.$$

La ecuación diferencial que resulta es

$$x^{1-\gamma}x(1-x)w'' + x^{1-\gamma}[\gamma-(\beta+\alpha+1)x + 2(1-\gamma)(1-x)]w' +$$

$$+\ x^{1-\gamma}\left[-\alpha\beta+\gamma(1-\gamma)x^{-1} - (\alpha+\beta+1)(1-\gamma)-\gamma(1-\gamma)x^{-1}+\gamma(1-\gamma)\right]w = 0.$$

Simplificando se obtiene:

$$x(1-x)w'' + \left[2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x\right]w' - (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)w = 0,$$

ecuación diferencial hipergeométrica en los parámetros $\alpha+1-\gamma$, $\beta+1-\gamma$ y $2-\gamma$.

Si $\alpha_0 = 1$ su solución en serie es

$$x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ x)$$

La solución tiene sentido completo si $2-\gamma$ es diferente de cero, o de un entero negativo.

Resumiendo: la ecuación diferencial hipergeométrica tiene dos soluciones particulares

$$y_1 = F(\alpha,\beta,\gamma;x)$$

y

$$y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;x),$$

que forman un conjunto fundamental de soluciones.

REPRESENTACION DE ALGUNAS FUNCIONES UTILIZANDO LA SERIE HIPERGEOMETRICA.

Por medio de la serie hipergeométrica que contiene los parámetros α, β y γ se pueden expresar algunas funciones elementales, dando valores especiales a estos parámetros.

A continuación doy algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Sea $\alpha = \gamma$, entonces

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = F(\alpha,\beta,\alpha;x) = 1+ \frac{B}{1}x +$$

$$+ \frac{\beta(\beta+1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\beta(\beta+1)..(\beta+n-1)}{n!}x^n \ldots$$

$$= \frac{1}{(1-x)\beta}$$

Ejemplo 2. Si $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = 2$

$$F(1,1,2;x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n+1} + \ldots = \frac{1}{x}\ \ell n\ \frac{1}{1-x}$$

Ejemplo 3. Con $\alpha = 1$ y $\gamma = \beta$ se obtiene

$$F(1,\beta,\beta;x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

La misma función se obtiene para $\beta = 1$, $\gamma = \alpha$

$$F(1,\beta,\beta;x) = F(\alpha,1,\alpha;x).$$

Ejemplo 4. Haciendo $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ y sustituyendo x por $-x$ se obtiene:

$$F(1,1,2;-x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + \ldots$$

$$= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\ell n(x+1)}{x}, \quad x \in (-1,1) - \{0\}.$$

Ejemplo 5. Si $\alpha = \frac{1}{2} = \beta$, $\gamma = \frac{3}{2}$, y, se reemplaza x por x^2

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};x^2\right) = 1 + \frac{x^2}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^6 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)(2n+1)}x^{2n} + \ldots$$

$$= \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots\right)$$

$$= \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} \qquad x \in (-1,1) - \{0\}.$$

Ejemplo 6. Es importante anotar que la serie $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ se interrumpe en x^n si α ó β son iguales al entero negativo $-n$, y en este caso es un polinomio en x.

$$F(-n,\beta,\beta;-x) = 1+\frac{(-n)\beta}{1.\beta}(-x)+\frac{(-n)(-n+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\beta(\beta+1)}(-x)^2+$$

$$+\frac{(-n)(-n+1)(-n+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3\ \ \beta(\beta+1)(\beta+2)}(-x)^3+\ldots+$$

$$\frac{(-n)(-n+1)\ldots(-n+(n-1))\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\ \beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}(-x)^n$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n x^n (-1)^n =$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + x^n = (1+x)^n.$$

Ejemplo 7. La solución de la ecuación diferencial de Legendre se puede expresar en la forma

$$F(n+1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}).$$

La ecuación diferencial de Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0\ ,$$

se transforma en una ecuación diferencial hipergeométrica mediante la substitución

$$x = 1 - 2z$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dy}{dz}\ .$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y}\,\frac{d^2y}{dz^2}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación inicial se llega a la ecuación diferencial hipergeométrica

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (1-2z)\frac{dy}{dz} + n(n+1)y = 0$$

donde $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$.

La solución a esta ecuación es

$$F(n+1,\ -n,\ 1;z) = F(n+1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}).$$

<u>Ejemplo 8</u>. $\lim\limits_{\alpha,\beta\to\infty} x\ F(\alpha,\beta,\frac{3}{2};\ -\ \frac{x^2}{4\alpha\beta}) = \operatorname{sen} x$

$$\lim_{\alpha,\beta\to\infty} x\ F(\alpha,\beta,\frac{3}{2};-\frac{x^2}{4\alpha\beta}) = \lim_{\alpha,\beta\to\infty} x\ (1 - \frac{\alpha.\beta}{1.2.3.\alpha.\beta}x^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.3.4.5.\ \alpha^2\beta^2}x^4 - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.4.5.6.7\ \alpha^3\beta^3}x^6 + \ldots)$$

$$= x(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \operatorname{sen} x.$$

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Bronstein-Semendiajeiv, *Taschenbuch der Mathematik.*

[2] Kleine, *Enzyklopädie - Mathematik.*

[3] Stepanow, W.W., *Lehrbuch der Differential-gleichungen.*

***

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional
BOGOTA - COLOMBIA.