Boletín de Matemáticas
Vol. XVII No. 1,2,3 (1983) **APUNTES**

UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE DE DIMENSION 5

Christian Charrier

I INTRODUCCION.

El propósito de este artículo es mostrar que el conjunto de las sinusoides del plano representadas por la ecuación

$$y\cos\theta + x \,\mathrm{sen}\,\theta = u + v \,\mathrm{sen}\,\{w(x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta) + \varphi\}$$

donde x, y son las coordenadas cartesianas, es una variedad de dimensión 5. Nos limitaremos a las "verdaderas" sinusoides que corresponden a $v \neq 0$ y $w \neq 0$.

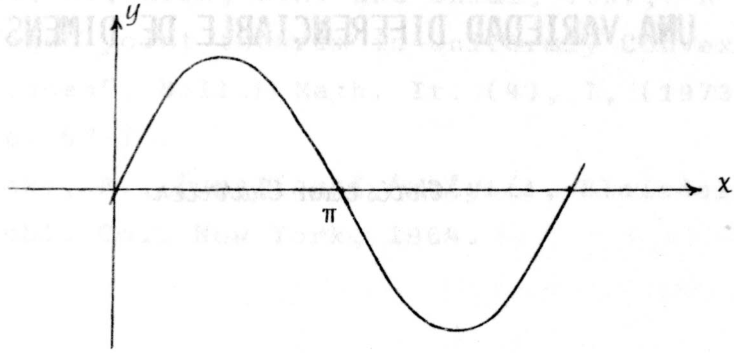
II INTERPRETACION DE LOS PARAMETROS (u,v,w,θ,φ)

Sea

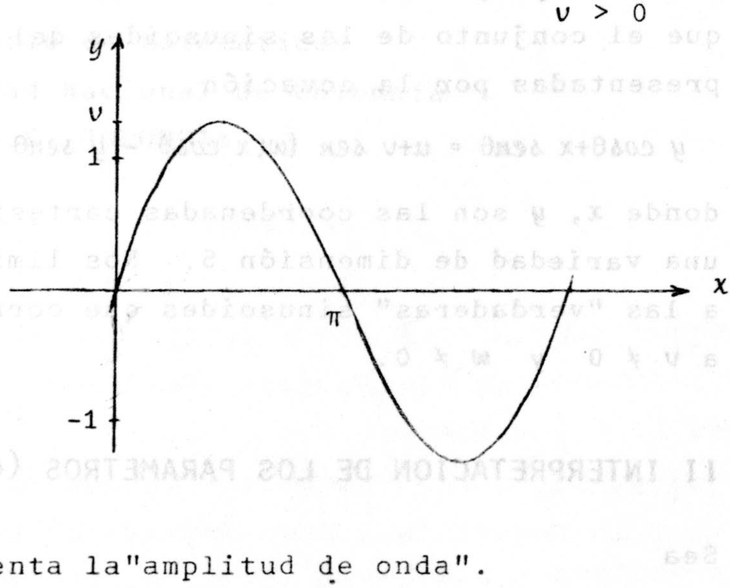
$$S(u,v,w,\theta,\varphi) =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \cos\theta + x \operatorname{sen}\theta =$$
$$u + v \operatorname{sen}[w(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta) + \varphi]\}$$

1. $S(0,1,1,0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \operatorname{sen} x\}$



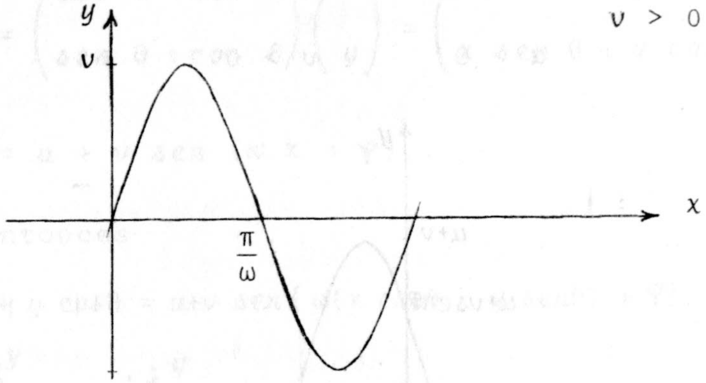
2. $S(0,v,1,0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = v \operatorname{sen} x\}$
$v > 0$



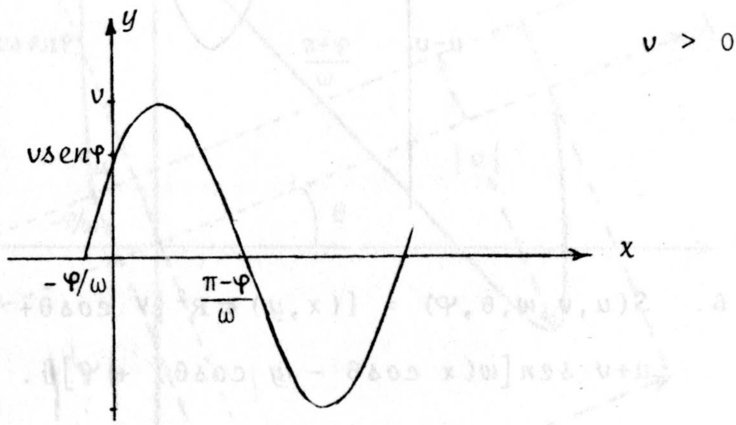
v representa la"amplitud de onda".

3. $S(0,v,w,0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = v \operatorname{sen} wx\}$

En este ejemplo el período es $T = \frac{2\pi}{w}$ que puede ser interpretado como la "longitud de onda"



4. $S(0,v,w,0,\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = v \operatorname{sen}(wx+\varphi)\}$

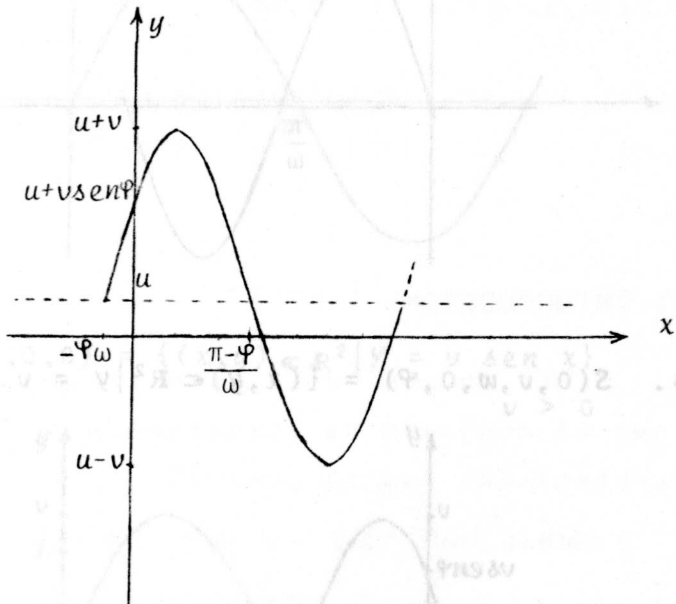


φ puede ser interpretado como la fase inicial.

5. $S(u,v,w,0,\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = u+v\ sen(wx+\varphi)\}$

Debemos translادar la gráfica precedente a lo largo del eje y una cantidad u.

$u > 0 \qquad v > 0$



6. $S(u,v,w,\theta,\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y\ cos\theta + x\ sen\theta = u+v\ sen[w(x\ cos\theta - y\ cos\theta) + \varphi]\}$.

Sea $X\ Y$ un sistema de coordenadas con

$$Y = u + v\ sen(w\ X + \varphi).$$

Aplicamos la rotación de ángulo θ.

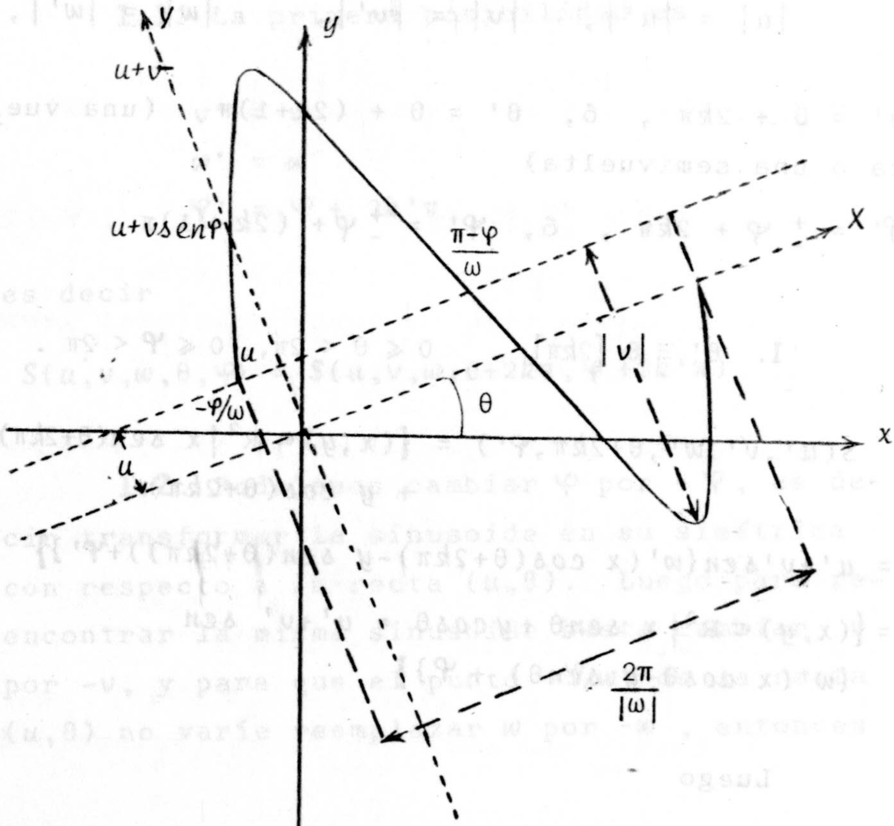
Sean (x,y) las nuevas coordenadas. Entonces

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & +\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

Como $Y = u + v\operatorname{sen}(\omega X + \varphi)$.

Entonces

$$x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta = u + v\operatorname{sen}\{w(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta) + \varphi\}$$



III CONSTRUCCION DE UNA RELACION DE EQUIVALENCIA.

El problema planteado en esta sección es el siguiente: Dado (u,v,w,θ,φ), encontrar $(u',v',w',\theta',\varphi')$ tal que

$$S(u,v,w,\theta,\varphi) = S(u',v',w',\theta',\varphi').$$

Un análisis de la representación gráfica de $S(u,v,w,\theta,\varphi)$ nos indica que:

$$|u| = |u'|, \qquad |v| = |v'|, \qquad |w| = |w'|,$$

$\theta' = \theta + 2k\pi$, ó, $\theta' = \theta + (2k+1)\pi$ (una vuelta o una semivuelta)

$\varphi' = \pm\varphi + 2k\pi$, ó, $\varphi' = \pm\varphi + (2k+1)\pi$

1. $\theta' \equiv \theta\ [2k\pi] \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

$$S(u',v',w',\theta+2k\pi,\varphi') = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ sen(\theta+2k\pi) + y\ cos(\theta+2k\pi)$$

$$= u'+v'sen\{w'(x\ cos(\theta+2k\pi)-y\ sen(\theta+2k\pi))+\varphi'\}\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ sen\theta + y\,cos\theta = u'+v'\ sen\ \{w'(x\ cos\theta - y\ sen\theta) + \varphi\}\}$$

Luego

$$S(u,v,w,\theta,\varphi) = S(u',v',w',\theta+2k\pi,\varphi')$$

sí y sólo si

$$u' + v' \, sen\{w'(x \cos\theta - y \, sen\theta) + \varphi'\}$$
$$= u + v \, sen\{w(x \cos\theta - y \, sen\theta) + \varphi\}$$

entonces $u = u'$

1.1. La primera posibilidad es

$$v' = v$$
$$w' = w$$
$$\varphi' = \varphi + 2k'\pi$$

es decir

$$S(u,v,w,\theta,\varphi) = S(u,v,w,\theta+2k\pi,\varphi+2k'\pi)$$

1.2. Podríamos cambiar φ por $-\varphi$, es decir transformar la sinusoide en su simétrica con respecto a la recta (u,θ). Luego para reencontrar la misma sinusoide basta cambiar v por $-v$, y para que el punto $-\varphi/w$, de la recta (u,θ) no varíe reemplazar w por $-w$, entonces

$$S(u,v,w,\theta,\varphi) = S(u,-v,-w,\theta+2k\pi,-\varphi+2k'\pi)$$

1.3. Si a φ le sumamos $(2k+1)\pi$ hay también transformación de la sinusoide.

$v'sen\,\varphi' = -v'sen\,\varphi$ luego se necesita cambiar v por $-v$, es decir

$$S(u,v,w,\theta,\varphi) = S(u,-v,w,\theta+2k\pi,\varphi+(2k'+1)\pi)$$

1.4. Si a $-\varphi$ le sumamos $(2k+1)\pi$ entonces $v'sen\varphi' = v'sen\,\varphi$ luego

$$S(u,v,w,\theta,\varphi) = S(u,v,-w,\theta+2k\pi,-\varphi+(2k'+1)\pi)$$

2. $\theta' \equiv \theta\ [(2k+1)\pi] \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$

Haciendo el mismo tipo de consideraciones geométricas y trigonométricas, tenemos

$$S(u,v,w,\theta,\varphi) = S(-u,-v,-w,\theta+(2k+1)\pi,\varphi+2k\pi)$$
$$= S(-u,v,-w,\theta+(2k+1)\pi,\varphi+(2k+1)\pi)$$
$$= S(-u,v,w,\theta+(2k+1)\pi,-\varphi+2k\pi)$$
$$= S(-u,-v,w,\theta+(2k+1)\pi,-\varphi+(2k+1)\pi)$$

3. Existe una relación de equivalencia R

sobre $\mathbb{R}^5_\# = \{(u,v,w,\theta,\varphi) \mid v \neq 0 \text{ y } w \neq 0\}$ tal que

$$(u,v,w,\theta,\varphi) \; R \; (u',v',w',\theta',\varphi')$$

si y sólo si $S(u,v,w,\theta,\varphi) = S(u',v',w',\theta',\varphi')$

De **1** y **2** tenemos que

$$\overline{(u,v,w,\theta,\varphi)} =$$

$$\{(u,v,w,\theta + 2k\pi, \varphi + 2k\pi),$$
$$(u,-v,-w,\theta + 2k\pi, -\varphi + 2k'\pi),$$
$$(u,-v,w,\theta + 2k\pi, \varphi + (2k'+1)\pi),$$
$$(u,v,-w,\theta + 2k\pi, -\varphi + (2k'+1)\pi),$$
$$(-u,-v,-w,\theta + (2k+1)\pi, \varphi + 2k\pi),$$
$$(-u,v,-w,\theta + (2k+1)\pi, \varphi + (2k'+1)\pi),$$
$$(-u,v,w,\theta + (2k+1)\pi, -\varphi + 2k\pi),$$
$$(-u,-v,w,\theta + (2k+1)\pi, -\varphi + (2k+1)\pi)\}$$

IV CONSTRUCCION DE UN ATLAS SOBRE

$$\{S(u,v,w,\theta,\varphi) \mid (u,v,w,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^5_\#\}$$

Sea $p = \mathbb{R}^5_\# \longrightarrow V_5 = \dfrac{\mathbb{R}^5}{R}$

$$(u,v,w,\theta,\varphi) \longrightarrow \overline{(u,v,w,\theta,\varphi)}.$$

donde V_5 esta provisto de la topología cociente, es decir la topología más fina que hace que p sea continua (entonces los abiertos de V_5 son los conjuntos A tales que $p^{-1}(A)$ es un abierto de $R^5_{\#}$).

p es sobre pero no es uno a uno. Sin embargo existen abiertos Δ_i de $R^5_{\#}$ tales que $p|_{\Delta_i}$ es uno a uno y los $p(\Delta_i) = u_i$ forman un sistema de abiertos que recubre a V_5

Por la construcción misma de las clases, existe siempre un único representante

$$(u',v',w',\theta',\varphi') \in \overline{(u,v,w,\theta,\varphi)}$$

con v' y w' positivos y

$$\begin{pmatrix} 0 \leqslant \theta < \pi \\ \text{ó} \\ \pi \leqslant \theta < 2\pi \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant \varphi < \pi \\ \text{ó} \\ \pi \leqslant \varphi < 2\pi \end{pmatrix}$$

podemos recubrir $[0,2\pi)$ con los abiertos siguientes $I_1 = (-\pi/2, \pi/2)$, $I_2 = (0,\pi)$, $I_3 = (\pi/2, 3\pi/2)$, $I_4 = (\pi, 2\pi)$, entonces

$$\Delta_i = \{(u \in \mathbb{R},\ v > 0,\ w > 0,\ \theta \in I_p,\ \varphi \in I_k)\ p,k = 1,2,3,4\}$$

Luego los $p_i = p|_{\Delta_i} : \Delta_i \longrightarrow u_i$ son homeomorfismos y

$$\bigcup_{i=1}^{16} u_i \supset V_5$$

Sea

$$A = \{(u_i,\ p_i^{-1})/\ i = 1,,,16\},$$

para establecer si A es un atlas sobre V_5, sólo falta verificar las relaciones de compatibilidad (cambio de cartas)

$$\forall_{i,j} \quad p_i^{-1}(u_i \cap u_j) = p_i^{-1}(u_i) \cap p^{-1}(u_j)$$

$$= \Delta_i \cap p^{-1}(u_j)$$

Δ_i es un abierto de $\mathbb{R}^5$.

$p^{-1}(u_j)$ es un abierto puesto que p es continua.

Luego $p_i^{-1}(u_i \cap u_j)$ es un abierto de $\mathbb{R}^5$.

Mostremos que el cambio de cartas se hace de manera suave

$$p_j^{-1} \circ p_i : p_i^{-1}(u_i \cap u_j) \longrightarrow p_j^{-1}(u_i \cap u_j)$$

$$(u,v,w,\theta,\varphi) \longrightarrow (u',v',w',\theta',\varphi')$$

pero $(u,v,w,\theta,\varphi) \in p_i^{-1}(u_i \cap u_j) \subset \Delta_i$ entonces

v, w son positivos.

Lo mismo sucede con $(u',v',w',\theta',\varphi')$ entonces

$$p_j^{-1} \circ p_i = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5) ,$$

con

$$\delta_1 = \pm \pi_1, \quad \delta_2 = \pi_2, \quad \delta_3 = \pi_3, \quad \delta_4 = t \circ \pi_4, \quad \delta_5 = t' \circ \pi_5$$

donde los π_i son las proyecciones sobre la i-ésima coordenada y t, t' son translaciones. Estas aplicaciones son de clase C^∞, luego el cambio de cartas se hace de manera suave.

Tomando el atlas maximal correspondiente obtenemos una estructura de variedad diferenciable de dimensión 5 de clase C^∞ sobre V^5.

V CONCLUSION.

El conjunto de los movimientos armónicos simples del plano constituye una variedad de dimensión 5 de clase C^∞.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Bourbaki, N., *Topologie Générale*, Ed. Hermann.

[2] Gutierrez, M.V., Variedades Diferenciables Notas.

[3] Hoquet-Bruhal, Y., *Géométrie Differentielle et Systemes Extérieurs*, ed. Dunod.

* *