Boletín de Matemáticas
Vol. XV, No. 2 (1981) pags. 80 - 84

ACOTACION DE MEDIDAS CON VALORES EN ESPACIOS DE BANACH

Otto Raul RUIZ M.

La proposición que enunciaremos a continuación es una generalización del teorema de acotación de medidas finitas signadas, al caso de medidas con valores en espacios de Banach. La demostración la haremos utilizando el principio de acotación uniforme del análisis funcional, el cual permite dar una prueba sin las complicaciones de los métodos tradicionales, los cuales resultan bastante engorrosos inclusive para σ-algebras.

Proposición

Sea X un conjunto, $\bar{A}$ un σ-anillo de subconjuntos de X, B un espacio de Banach, y m una función de $\bar{A}$ hacia B, contablemente aditiva. En estas condiciones, existe una constante real K, tal que $\|m(A)\| \leq K$ para todo A perteneciente a $\bar{A}$.

Nota

Decir que m es contablemente aditiva significa que para toda sucesión $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ de elementos de $\overline{A}$ disyuntos entre sí ,

$$m\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{1}^{\infty} m(A_n)$$

donde la serie converge en la norma de B .

Lema

Una medida signada m , de valor real , es acotada .

Prueba

Si m no es acotada superiormente , para todo N mayor que cero existe A_N perteneciente a $\overline{A}$ tal que $m(A_N)$ sea mayor o igual que N .

Sea $(C|D)$ una descomposición de Hahn de X con respecto a m , tal que C y D sean respectivamente los conjuntos positivo y negativo en el sentido de Halmos (2, p. 121) . A partir de propiedades elementales de las descomposiciones de Hahn obtenemos la siguiente desigualdad

$$m(C \cap A_N) \geq m(A_N) \geq N .$$

Tomemos ahora

$A^M = \bigcup_{1}^{M} (C \cap A_N)$. Observemos por un lado que $A^M \subset C$. Además, si M es mayor o igual que N, $m(A^M) \geq m(C \cap A_N) \geq N$ para todo $M \geq N$ y por lo tanto $m(A^M) \geq M$.

Puesto que los conjuntos A^M constituyen una secuencia monótona creciente de subconjuntos del conjunto positivo C de la descomposición de Hahn, se obtiene que $m(\mathrm{Lim}_M A^M) = \mathrm{Lim}_M(m(A^M)) = \infty$ lo cual es absurdo puesto que $\mathrm{Lim}_M(A^M)$ pertenece a $\bar{A}$.

En forma similar se demuestra que la no acotación inferior nos lleva también a un absurdo por lo cual podemos considerar la prueba del lema completa.

Consideremos ahora el conjunto $B^{\sim}$ de formas lineales contínuas de B.

Si $\lambda \in B^{\sim}$ veamos que la aplicación $\lambda_m : \bar{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\lambda_m(A) = \lambda(m(A))$ es contablemente aditiva. Si A_i, $i \in N$, es una colección de conjuntos disyuntos de $\bar{A}$, tenemos

$$\mathrm{Lim}_n \sum_1^n \lambda_m(A_i) = \mathrm{Lim}_n \sum_1^n \lambda(m(A_i)) = \mathrm{Lim}_n \lambda(\sum_1^n m(A_i)).$$

Además, puesto que la función λ es contínua y $\sum_1^n m(A_i)$ converge en norma a $m(\bigcup_1^\infty A_i)$, se tiene

$$\operatorname{Lim}_n \lambda\left(\sum_1^n m(A_i)\right) = \lambda\left(m\left(\bigcup_1^{\infty} A_i\right)\right) = \lambda_m\left(\bigcup_1^{\infty} A_i\right).$$

De las igualdades anteriores se deduce inmediatamente que $\sum_1^{\infty} \lambda_m(A_i) = \lambda_m\left(\bigcup_1^{\infty} A_i\right)$ con lo cual nuestra aseveración anterior queda demostrada .

Trivialmente las funciones λ_m son medidas signadas de valor real. En virtud del lema demostrado anteriormente , existirá para cada función λ_m un número real K_1 mayor que cero tal que $|\lambda_m(A)| \leq K_1$ para todo A perteneciente a $\bar{A}$.

Para completar la prueba utilizaremos el principio de acotación uniforme cuyo enunciado nos dice : Si S es un subconjunto de un espacio de Banach B en el cual para toda función λ perteneciente a $\tilde{B}$ existe una constante K_1 tal que para todo x perteneciente a S se tiene $|\lambda(x)| \leq K_1$, entonces existe una constante $K > 0$ tal que para todo x de S, $\| x \| \leq K$.

Ahora bien , si consideramos $S = m(\bar{A})$ hemos visto que existe para cada λ perteneciente a $\tilde{B}$ una constante K_1 tal que para todo $m(A) \in S$ se tiene

$$|\lambda(m(A))| = |\lambda_m(A)| \leq K_1 .$$

En vista del principio de acotación uniforme , existe K mayor que cero tal que para todo $m(A)$, $A \in \bar{A}$, $\|m(A)\| \leq K$, con lo cual se termina la demostración .

BIBLIOGRAFIA

(1) Integral, Measure and Derivative : a Unified Approach- Shilov and Gurevich Editorial Prentice-Hall, Inc.

(2) Measure Theory, by Paul R. Halmos Van Nostrand Company.

(3) Conferencias de Análisis Funcional, Januario Varela S.C.M.

(4) Functional Analysis. Walter Rudin McGraw-Hill Book Company.

Otto Raúl RUIZ M.

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional

Bogotá - Colombia .