Boletín de Matemáticas

Vol. XV , No. 2 (1981), pags, 65 - 79

CONVERGENCIAS ASOCIADAS A TOPOLOGIAS : PUNTOS FIJOS DE UN OPERADOR

Carlos J. RUIZ S.

1. PUNTOS FIJOS DE $k = \tilde{C}\,\tilde{T}$ PARA UNA PAREJA DE FUNCIONES ADJUNTAS $\underset{\rightarrow}{\tilde{C}}\,\underset{\rightarrow}{\tilde{T}}$.

Recordemos que una pareja de funciones $U \overset{s}{\to} V \overset{d}{\to} U$ monótonas entre conjuntos ordenados , cumplen las condiciones de adjunción (s = siniestra d = diestra) si para $u \in U$ y $v \in V$ las relaciones

$$s(u) < v \quad y \quad u < d(v)$$

son equivalentes .

En las condiciones anteriores se puede afirmar que

1) s conmuta con extremos superiores

2) t conmuta con extremos inferiores

Es más , las funciones $j = ds : U \to U$ y $k = sd : V \to V$ cumplen

3) $k(v) < v$ y $u < j(u)$ para $u \in U$, $v \in V$

4) $j \cdot j = j$ y $k \cdot k = k$

y , 5) Las condiciones siguientes son equivalentes para un punto u de U (resp v de V)

a) u es punto fijo de j : es decir $j(u) = u$. (resp. v es punto fijo de k)

b) u está en la imagen de d (resp. v está en la imagen de s) .

6) Supongamos ahora que el conjunto V sea cerrado para extremos inferiores (e.d. todo subconjunto no vacío tiene extremo inferior) y que U sea cerrado para extremos superiores . En esas condiciones

a) el conjunto de puntos fijos de k es cerrado para extremos superiores (e.d. si F es un subconjunto no vacío de puntos fijos de k , su extremo superior es un punto fijo de k).

b) el conjunto de puntos fijos de j es cerrado para extremos inferiores .

2. LAS CONDICIONES C_1, C_2, C_3 PARA UN PUNTO FIJO DE $k : \mathrm{Crit}(X) \to \mathrm{Crit}(X)$

Para una función $C : X \to P(\mathrm{Suc}\ X)$ se había convenido en que por lo menos cumpliera las condiciones C_1 y C_2 para que pasara a formar parte de

$Crit(X)$:

C_1. Si S_x representa la función constante de valor x, $S_x \in C(x)$.

C_2. Si $S \in C(x)$, toda subsucesión S' de S también está en $C(x)$.

NOTA :

Una función $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ será <u>propia</u> si para cada n, $Q^1(n)$ es finito. Si $S : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión, y Q es propia, $S \cdot Q$ se llamará sub-sucesión de S.

El conjunto $Crit(X)$ queda ordenado por la relación " $C > C'$ si para cada $x \in X$, $C(x) \subseteq C'(x)$ ". Con este orden $Crit\ X$ tiene un elemento máximo, uno mínimo y es cerrado para extremos inferiores y superiores.

Por otra parte notemos $Top(X)$ el conjunto de las topologías sobre X que, ordenado por inclusión, goza de las mismas características de máximos, mínimos y extremos del anterior.

Entre $Top(X) = U$ y $Crit(X) = V$ existe un par adjunto

$$Top(X) \xrightarrow{\tilde{C}} Crit(X) \xrightarrow{\tilde{T}} Top(X)$$

que asocia

a) A una topología t sobre X, el criterio de convergencia $\tilde{C}(t)$ para el que $\tilde{C}(t)(x)$ representa las sucesiones t-convergentes a x ;

b) a una función $C \in Crit(X)$ la topología $\tilde{T}(C)$ cuyos abiertos A quedan determinados por la siguiente norma :

" Cada vez que para un x de A y una sucesión S de puntos de X , se cumpla que $S \in C(x)$, necesariamente, S está casi toda en A "

NOTA :

decimos que una sucesión S está casi-toda en A , si $S(n) \in A$ para casi todo n , salvo eventualmente para finitos valores de n .

AFIRMACION .

La función $\tilde{C}$ es adjunta a la izquierda de la función $\tilde{T}$.

De acuerdo con el Parágrafo 2, si notamos $k = \tilde{C}\,\tilde{T}$ para determinar los puntos fijos , basta estudiar la imagen de la función $\tilde{C}$. Es decir las convergencias de la forma $\tilde{C}(t)$, donde t es una topología sobre X .

Es más , toda convergencia de la forma $\tilde{C}(t)$ es de la forma $\tilde{C}(t_o)$ en donde t_o está en la imagen de $\tilde{T}$ (es decir t_o es punto fijo de $\tilde{j} = \tilde{T}\,\tilde{C}$) : en efecto

$\tilde{C}(t) = \tilde{C}\,\tilde{T}(\tilde{C}(t)) = \tilde{C}(\tilde{T}\,\tilde{C}(t)) = \tilde{C}(t_o)$, con $t_o = \tilde{T}\,\tilde{C}(t)$.

Una propiedad , satisfecha por los $\tilde{C}(t)$ y a la que hemos denominado C_3 , se refiere a la relación entre los valores de adherencia y los valores límites de sucesiones en un espacio topológico :

Para una topología t , y una sucesión S de puntos de X , un punto x es valor de adherencia de S si existe una subsucesión S' de S que converge a x según t . Es claro que un valor límite x de S (es decir cuando S t-converge a x) es un valor de adherencia: Inversamente , sin restricciones sobre el espacio t , si notamos

$$vl(S) = \{x \mid S \text{ t-converge a } x\}$$

$$va(S) = \{x \mid x \text{ valor de adherencia de } S\}$$

entonces

$$vl(S) = \bigcap_{S' < S} va(S') \qquad (C_3)$$

(S' < S significa que S' es subsucesión de S) .

Se nota , sin embargo , que las funciones vl y va : Suc X → P(X) también tiene sentido para un criterio C ∊ Crit X ya que dado C: X → P(Suc X) , se define naturalmente el conjunto

$$vl_C(S) = \{x \mid S \in C(x)\}$$

$$va_C(S') = \{y \mid \text{existe } S' < S, \text{ con } S' \in C(y)\}$$

y también se tiene , cuando C cumple C_2 , que $vl_C(S) \subset vl_C(S') \subset va(S')$ para $S' < S$ con lo cual $vl_C(S) \subset \bigcap_{S'<S} va_C(S')$, con solo suponer C en Crit X .

DEFINICION

Diremos que un criterio $C \in$ Crit X cumple la condición C_3 si , para toda sucesión S ,

$$vl_C(S) = \bigcap_{S' < S} va_C(S') \qquad (C_3)$$

Dicho de otra manera , si para cada sucesión S se cumple que

" para cada una de sus subsucesiones S' , se puede encontrar una subsucesión $S'' < S'$, que cumpla $S' \in C(x)$, entonces S misma está en $C(x)$ " .

Es del caso anotar que si bien la condición C_3 es necesaria para que $C \in$ Crit X sea punto fijo de k , no es suficiente , como nos lo muestra el ejemplo que sigue :

EJEMPLO. (Cf.(4)) .

Nos situamos en un conjunto infinito X y elegimos un punto $\underline{a}$ de X. Prescribimos que a un punto x distinto de $\underline{a}$, solo converjan las sucesiones casi-constantes de valor x. En cambio, son convergentes hacia $\underline{a}$ todas las sucesiones salvo aquellas que admitan una subsucesión propia. Dicho de otra manera, las que tienen rango finito. Los abiertos de $\tilde{T}(C)$ son de dos tipos según que contengan el punto $\underline{a}$, ó que no lo contengan.

1. Si A no contiene al punto $\underline{a}$, es abierto, sin más;

2. Si A contiene a $\underline{a}$, necesariamente A debe coincidir con X todo entero.

Cuando se calcula la convergencia debida a dicha topología se encuentra que las sucesiones de X, sin condición convergen el punto $\underline{a}$. Con lo cual $\tilde{C}\,\tilde{T}(C)$ es estrictamente menor que C. Es decir que nuestro criterio C no es punto fijo de $k = \tilde{C}\,\tilde{T}$.

Sin embargo, satisface, además de C_1 y C_2 la propiedad C_3: si una sucesión S no converge al punto $\underline{a}$, admite una sub-sucesión T propia y cualquier subsucesión de ésta, es, a fortiori, propia; con lo cual T no admite subsucesiones convergentes al punto $\underline{a}$.

Nótese que el ejemplo , deja de ser un caso " de no punto fijo " , cuando se restringe a un conjunto finito X , pues allí , convergerían hacia a todas las sucesiones de puntos de X .

3. LAS CONDICIONES DE TIPO C_4

En vista de la debilidad de la condición C_3 , se pensó en captar otra característica de la convergencia de sucesiones en espacios topológicos , con miras a hacer , de élla y C_3 , condiciones suficientes para que un criterio C fuera punto fijo de k .

Se examinó primero el caso de espacios 1-contables y se observó que allí se cumple la siguiente propiedad de " diagonalización " .

Si $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ es una bi-sucesión , tal que para cada k , la sucesión $S(k,-) : \mathbb{N} \to X$, $n \rightarrowtail S(k,n)$ converge a x_k , y , la sucesión $k \rightarrowtail x_k$ converge a x . Entonces existe una función $Q : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $S \cdot Q : \mathbb{N} \to X$ es convergente a x .

Obsérvese que en el parágrafo anterior nos abstuvimos de imponer condiciones a Q . Si se está pensando en un espacio topológico 1-contable y Hausdorff se puede elegir $Q : N \rightarrow N \times N$ entre las funciones que cumplen la siguiente propiedad :

Si $n > m$, $Q(n) = (Q_1(n), Q_2(n))$,

$Q(m) = (Q_1(m), Q_2(m))$, entonces

$Q_1(n) > Q_1(m)$ y $Q_2(n) > Q_2(m)$.

Si eliminamos la propiedad de Hausdorff , Q puede ser escogida entre las funciones propias .

En cada caso , con condiciones mas o menos fuertes de la función Q , obtenemos una condición de " diagonalización " , o del tipo C_4 , y en el trabajo de R. de Rebolledo y S. de Plazas (4) aparecen las dificultades que se encuentran cuando se desea demostrar la equivalencia entre los puntos fijos del operador k y los criterios C que satisfacen C_3 y " C_4 " (según se haya escogido el " C_4 ").

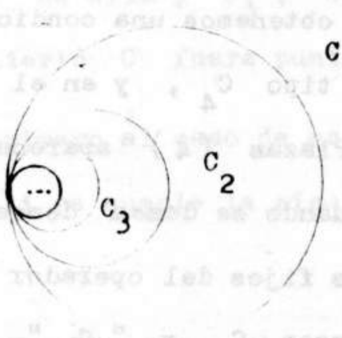
En su trabajo M. Suarez , logró establecer una condición C_4 hasta llegar a concluir que para que un criterio sea punto fijo del operador k , basta que cumpla C_3 y (ése) C_4 .

Sin embargo , el problema no termina a ese nivel pues se demuestra que dichas condiciones suficientes no son necesarias .

Con el fin de precisar esa condición C_4, analizamos el caso de la convergencia en un espacio celular que no sea localmente finito .

EJEMPLO (R. de Rebolledo y S. de Plazas) .

Sea X el conjunto formado por circunferencias C_n, una por cada natural $n = 1, 2, \ldots$, de radios $1/n$, como muestra la figura .



Cada C_n con su topología métrica común y corriente , como subespacio de $\mathbb{R}^2$. En cambio X no tendrá la topología de subespacio : un conjunto es abierto en X si , y solamente si , su traza con cada C_n es abierto en C_n . De manera semejante , se caracterizan los cerrados . Nótese por ejemplo que el conjunto

$H = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ es cerrado en esa topología, y no lo és en la de subespacio . Ahora bien ,

AFIRMACION

Son convergentes hacia el punto $\underline{a}$, aquellas sucesiones S que cumplen : (a) en $\mathbb{R}^2$ son convergentes hacia $\underline{a}$, y , (b) S toca a lo sumo un número finito de arcos $C_n - \{a\}$.

Así pues , la sucesión $< a_1, a_2, \ldots >$ no converge en X hacia $\underline{a}$, a pesar de que sí lo hace en $\mathbb{R}^2$.

Para construir sucesiones convergentes hacia el punto $\underline{a}$, se forman varios arcos en número finito . En cada uno se considera una sucesión convergente hacia $\underline{a}$ (en $\mathbb{R}^2$) y se amalgaman .

Por el contrario si $S^{(1)}$ es una sucesión en $C_1 - \{a\}$ que converge a $\underline{a}$, y $S^{(2)}$ es una sucesión de $C_2 - \{a\}$ convergente a $\underline{a}$ y así sucesivamente se define $S^{(k)}$ para $k = 1,2,3,4\ldots$, entonces la bisucesión $S : (k,n) \rightarrowtail S^k(n)$ cumple (1) para cada k , $S(k, \_) = S^{(k)}$ es convergente a $x_k = a$, (2) no existe una función $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que cumpla la condición

(e) " el compuesto $n \rightarrowtail Q(n) = (Q_1(n), Q_2(n)) \rightarrowtail Q_1(n)$

de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es propia " , tal que $S.Q$ sea convergente hacia $\underline{a}$ en X.

En efecto la sucesión $n \rightarrowtail S.Q(n) = S^{Q_1(n)}(Q_2(n))$, toma valores , para cada valor de n , en el arco $C_{Q_1(n)} - \{a\}$. La condición que se impuso a Q , hace que $n \rightarrowtail S.Q(n)$ no pueda tocar cada arco $C_k - \{a\}$ sino un número finito de veces , con lo cual , $n \rightarrowtail S.Q(n)$ toca infinitos arcos y ya , en nuestra topología sobre X , no es convergente al punto $\underline{a}$

4. CONDICION SUFICIENTE PARA QUE C SEA PUNTO FIJO .

La condición $C_{4.s}$ impuesta por M. Suárez a un criterio C de convergencia se enuncia así : cada vez que en una bi-sucesión $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ se cumpla (1) la sucesión $S^{(k)} : n \rightarrowtail S(k,n)$ C- converge a x_k, $k = 1, 2, \ldots$ (2) la sucesión $k \rightarrowtail (x_k)$ es C-convergente a x , entonces existe una función $Q : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que cumple la condición (*) y tal que $S.Q : \mathbb{N} \to X$ es C-convergente a x .

PROPOSICION. (M. Suárez) .

<u>Un elemento</u> C de Crit X es <u>punto fijo</u> del operador K si cumple las condiciones C_3 y $C_{4.s}$.

OBSERVACION 1.

Los puntos fijos de K son las convergencias asociadas a topologías. Así que las condiciones C_1, C_2, C_3 y $C_{4 \cdot s}$ son <u>suficientes</u> sobre una función $C : X \to P(\mathrm{Suc}\ X)$ para que C sea asociada a una topología. El ejemplo que dimos de los arcos tomados por un punto, nos muestra la existencia de convergencia asociada a topologías sin que cumplan $C_{4 \cdot s}$.

OBSERVACION 2.

Como el conjunto de puntos fijos de K es cerrado para extremos superiores, la observación anterior nos lleva a dudar sobre la conservación de $C_{4 \cdot s}$ por extremos superiores : es decir que se puede esperar desde ahora encontrar una colección C_λ de criterios que cumplan C_3 y $C_{4 \cdot s}$ <u>sin que</u> el criterio $\mathrm{Sup}_\lambda\, C_\lambda$ (que cumple C_3) cumpla $C_{4 \cdot s}$.

Este tipo de fenómenos se había presentado al estudiar los puntos fijos del operador J, (cf. 2) cuando se trataba de caracterizar las topologías que quedan completamente determinadas por la convergencia de sus sucesiones. La propiedad de ser 1-contable era suficiente para ser punto fijo y además no era una propiedad es table por extremos inferiores .

En este caso se completó el estudio de los puntos fijos de J con la afirmación " todo espacio 0-contable es extremo inferior de topologías 1-contables " .

En este caso digamos que para los criterios que cumplen $(C_1, C_2 \mid y) C_3$, la propiedad $C_{4.s}$ viene a ser de cierta manera lo que la 1-contabilidad era para las topologías . En efecto .

PROPOSICION. (M. Suárez (3)).

Todo punto fijo de K es extremo superior de convergencias que cumplen (C_1, C_2) C_3 y $C_{4.s}$ y viceversa , si un criterio C extremo superior de criterios $\{C_\lambda\}$ que cumplen C_3 y $C_{4.s}$ entonces es punto fijo de K .

BIBLIOGRAFIA

(1) Ruiz C. y Suárez M., Topología o convergencia. (Cuaderno 1. Fascículo 2.). Paipa (1980) .

(2) Ruiz C., Topología o Convergencia. (Cuaderno 1. Fasc 1) Tunja (1975) .

(3) Suárez M., Notas no publicadas .

(4) De Rebolledo R. y De Plazas S. Tesis. Universidad Pedagógica Nacional. (1981).

Carlos RUIZ SALGUERO .

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional

Bogotá - Colombia .