Boletín de Matemáticas
Vol. XIII, Nos. 2,3,4 (1979), pags 146 - 160

RELACION ENTRE EL GENERO DE UNA SUPERFICIE Y EL GRADO DE UN POLINOMIO+

Kemel GEORGE

Vamos a demostrar que el género g de una superficie y el grado p de un polinomio están relacionados de la manera siguiente :

Teorema

Dado un número $g \geq 0$ se puede construir un polinomio $P(x,y,z)$ tal que la superficie definida por la ecuación $P = c$, para algún $c > 0$, tiene precisamente género g .

Además , si un polinomio P tiene grado p y la superficie definida por la ecuación $P = c$, tiene género g , necesariamente se cumple que $p \geq 1 + \sqrt{1+8g}$.

Como una guía ilustrativa de la demostración , podríamos sintetizar los pasos que vamos a seguir , así :

1). Como una superficie de género g es topológicamente equivalente a una esfera a la cual en su interior se le han adherido g "asas" (ver figura 1), entonces nosotros necesitamos construir un polinomio $P(x,y,z)$ cuya superficie de nivel $P(x,y,z) = c$, para algún c , sea topológicamente equivalente a una esfera con g "asas" adheridas .

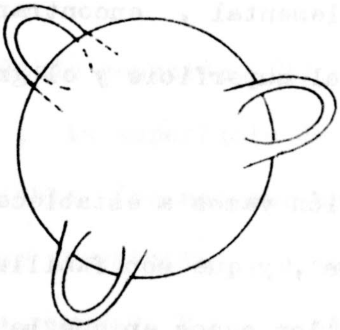


Fig. 1

2). Para construir tal polinomio , tomamos la esfera S^2 y la cruzamos por g rectas paralelas . El producto algebraico de la esfera y ésas g rectas será el polinomio buscado . Esto demuestra la primera parte del teorema .

3). Para demostrar la segunda parte , utilizaremos el siguiente argumento topológico : si a una esfera le añadimos por su interior una serie de "asas múltiples" (o sea , varias "asas" a su vez interconectadas entre sí) , entonces la superficie resultante tendrá el mismo tipo de homotopía que el de una esfera con cierto número de rectas que la cruzan y se intersectan entre sí .

4). Por consiguiente , bastará construir (mediante el método enunciado arriba) un polinomio cuya superficie de nivel sea homotópicamente equivalente a una esfera unida a rectas que se intersectan . Aplicando análisis combinatorio elemental , encontraremos la relación entre el género de tal superficie y el grado de dicho polinomio .

A continuación vamos a establecer algunas notaciones que requerimos , y que son familiares del análisis elemental . En aquellos casos en que se enuncien resultados conocidos , daremos referencia a algunos textos donde se encuentran . De la misma forma procederemos cuando enunciemos teoremas de clasificación topológicos , en los cuales nos apoyaremos para la demostración del teorema central .

Sea $P = P(x,y,z)$ un polinomio cualquiera en tres variables , con coeficientes reales . Si consideramos a P como una función real , cada ecuación de la forma $P = P(x,y,z) = c$ nos define un conjunto P_c llamado la <u>superficie de nivel</u> de P en el valor c .

El valor c se llama <u>valor regular</u> de P si el gradiente de P (gradP) es un vector distinto de cero en cada punto (x,y,z) tal que $P(x,y,z) = c$.

En caso de que en un punto (x,y,z) el gradiente P se anule , dicho punto se denomina <u>punto crítico</u> de P , y el valor c correspondiente se denomina <u>valor crítico</u> de P .

Es un resultado conocido (1) que si c es valor regular de P , la superficie de nivel P_c es una variedad diferenciable (no necesariamente conexa) de dimensión 2 . Por simplicidad , a tal variedad la llamaremos <u>superficie regular</u> P_c , o más brevemente , la superficie P_c .

Similarmente , si $P = P(x,y)$ es un polinomio en dos variables cualesquiera , manteniendo la notación arriba establecida , denominaremos a P_c la curva de nivel definida por $c \in \mathbb{R}$. Si c es valor regular de P, a la "variedad diferenciable (no necesariamente conexa) de dimensión 1" , la llamaremos <u>curva regular</u> , o más brevemente , curva P_c .

En ambos casos , sea P un polinomio de dos o tres variables . Si $c = 0$, llamaremos a P_0 "el conjunto de ceros de P" o más brevemente , "el cero de P" .

A manera de ejemplo , cuando el polinomio

$P = 1 - x^2 - y^2 - z^2$ es considerado como una función real, el valor $c = 0$ es un valor regular de P, y la superficie P_o es la conocida esfera S^2. Si hacemos cero una de las variables, obtenemos un polinomio en dos variables, cuya curva regular P_o es el conocido círculo S^1. Este círculo se obtiene también intersectando la esfera S^2 con cualquiera de los planos determinados por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Finalmente, por simplicidad en la notación, llamaremos círculos S a las curvas regulares topológicamente equivalentes a S^1, suprimiéndole el superíndice a S^1.

Vamos a enunciar a continuación una serie de resultados, que nos permitirán construir un polinomio P cuya superficie regular P_o tenga género g, para cualquier g dado.

Lema 1.

Sea S^1 el círculo dado por $x^2+y^2 = 1$. Sean $p_i = (a_i, b_i)$ n puntos del plano en el interior del círculo S^1. Entonces, el polinomio P dado por la fórmula

$$P = (1 - x^2 - y^2) \prod_{i=1}^{n} \left[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 \right]$$

tiene un valor regular c, tal que la curva P_c consiste de n círculos S_i disconexos, que rodean a cada punto p_i, y un círculo S que rodea los círculos S_i. (Figura 2.)

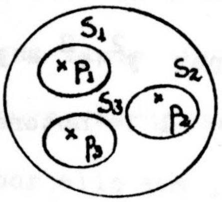


fig. 2

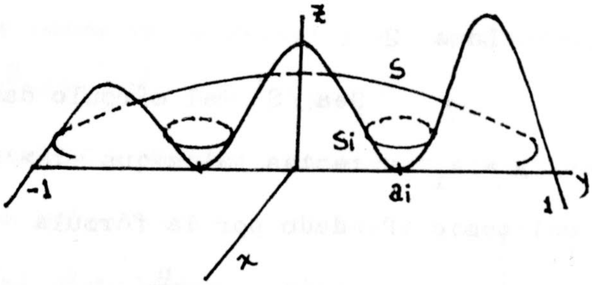


fig. 3

Este resultado se obtiene al analizar la naturaleza del polinomio P, cuya gráfica damos en la figura 3. Por facilidad, hemos tomado los puntos p_i en el eje y, haciendo $p_i = (0,a_i)$. Si además estos a_i se distribuyen simétricamente, se concluye rápidamente que $c = 0$ es un valor crítico de P, y que para los c cercanos a cero y con valores positivos, el polinomio

$$P = (1-x^2-y^2) \prod_{i=1}^{n} [x^2+(y-a_i)^2]$$

determina la curva de nivel mencionada.

A manera de ejemplo , si $n = 1$ y p es el punto $(0,0)$, entonces el polinomio $P = (1-x^2-y^2)(x^2+y^2)$ tiene como únicos valores críticos a $c = 0$ y $c = 1/4$. De forma tal que si $1/4 > c > 0$, la curva regular $P(x,y) = c$ consiste de dos círculos en torno a $(0,0)$.

Lema 2

Sea S^1 el círculo dado por $y^2+z^2 = 1$. Sean $y = a_i$ n rectas tales que $1 > a_i > -1$. Entonces el polinomio P dado por la fórmula

$$P(y,z) = (1-y^2-z^2) \prod_{i=1}^{n} (y-a_i)^2$$

tiene un valor regular c , tal que la curva P_c consiste de círculos S_i colocados en cada una de las regiones delimitadas por las rectas $y = a_i$. (ver figura 4) .

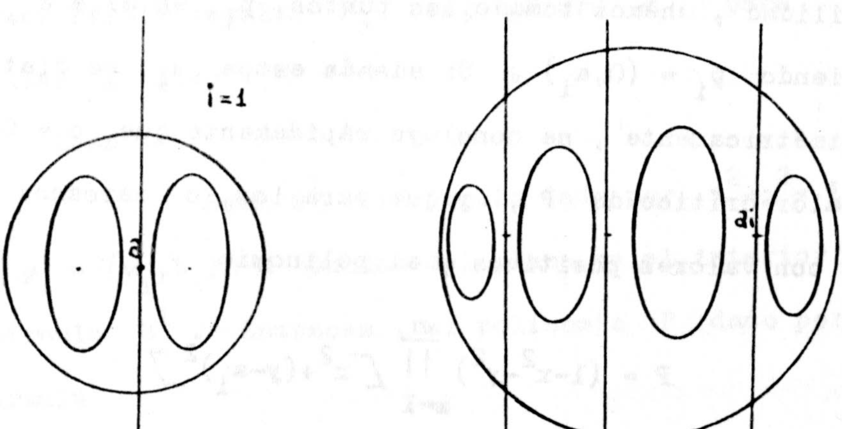
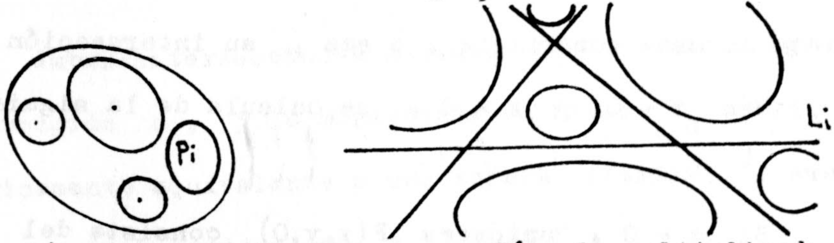


fig. 4

De la misma forma que en el Lema 1 , si hacemos $i = 1$ y tomamos la recta $y = 0$, el polinomio se convierte en $P(y,z) = (1-y^2-z^2)y^2$ cuyos valores críticos son $c = 0$ y $c = 1/4$. Cada uno de los valores regulares comprendidos entre 0 y 1/4 definen dos círculos colocados a ambos lados de la recta $y = 0$. Obsérvese que tanto $(x-a_i)^2+(y-b_i)^2$ como $(y-a_i)^2$ son polinomios cuyos ceros son puntos y rectas , respectivamente . Es por ello que , en ambos lemas , podemos afirmar que hemos multiplicado el círculo por puntos (o el círculo por rectas) para obtener una familia de curvas de la que hemos destacado un elemento particular . Este resultado es mucho más general : si multiplicamos el círculo por puntos cualesquiera (o por rectas cualesquiera) en el sentido de multiplicación de polinomios , podemos obtener un valor regular cuya curva regular es la que a continuación se muestra en la figura 5 :

Fig. 5



Círculo multiplicado por puntos

Círculo multiplicado por rectas

Ahora aplicando los lemas 1 y 2 , podemos construir el polinomio P cuya superficie regular P_c sea conexa , compacta , y tenga género g . Para ello procederemos así : tómense g rectas de la forma $x^2+(y-a_i)^2$ en donde $i = 1, 2, \ldots, g$, para $x = 0$ y z arbitrario , o sea , definida por la ecuación

$$x^2+(y-a_i)^2 = 0 .$$

Multiplíquense estas g rectas por la esfera S^2 . El polinomio resultante es :

$$P(x,y,z) = (1-x^2-y^2-z^2) \prod_{i=1}^{g} \left[x^2+(y-a_i)^2 \right]$$

Veremos que este polinomio define una superficie regular P_c de género g .

En primer lugar , en $c = 0$ el polinomio P tiene un valor crítico , cuya superficie de nivel P_0 consiste de una esfera unida a las g rectas . Ahora , si tomamos c positivo y cercano a cero , la superficie P_c está totalmente contenida en la esfera S^2 . El esqueleto de esta superficie , o sea , su intersección con los planos $z = 0$ y $x = 0$, se calcula de la siguiente manera :

Si $z = 0$, entonces $P(x,y,0)$ consiste del círculo multiplicado por g puntos . Aplicando el lema

2 , obtenemos el corte de la superficie con el plano $z = 0$, tal como indica la figura 6 .

Si $x = 0$, entonces $P(0,y,z)$ consiste del círculo multiplicado por g rectas . Aplicando el lema 1 , obtenemos el otro corte de la superficie con el plano $x = 0$.

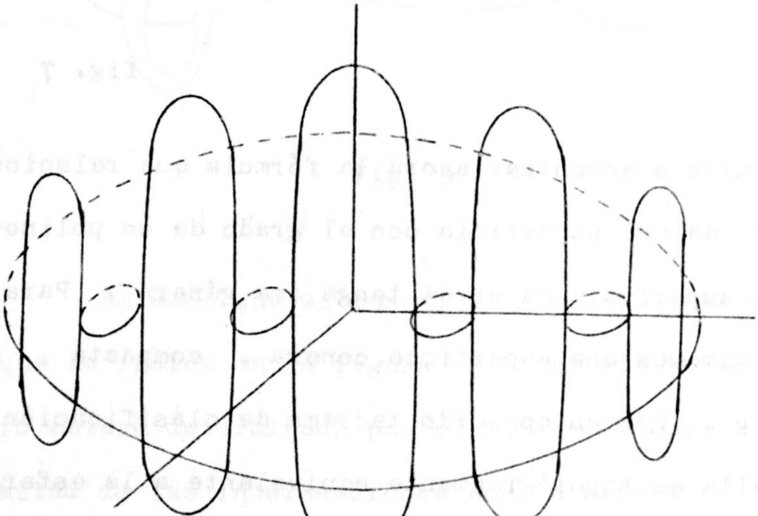


fig. 6

Ambas intersecciones corresponden al valor regular escogido c , y la superficie de nivel P_c es topológicamente equivalente a una esfera (figura 7) a la que se le han adjuntado g " asas " :

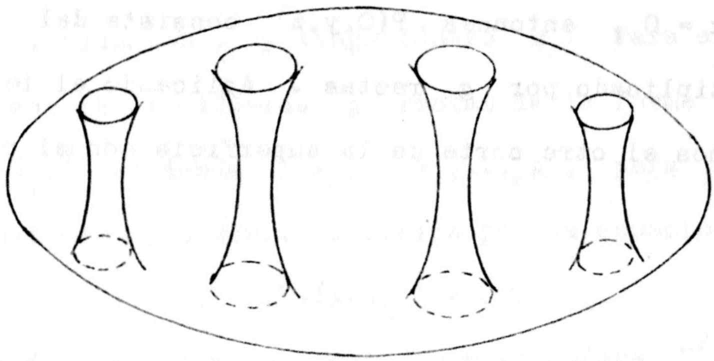


fig. 7

Vamos a encontrar ahora la fórmula que relaciona el género de una superficie con el grado de un polinomio cuya superficie de nivel tenga ese género . Para ello , tomemos una superficie conexa , compacta , de género g . Por un conocido teorema de clasificación (2) , ella es topológicamente equivalente a la esfera con g "asas" adheridas . Estas "asas" las podemos reunir en un "asa con g+1 patas" pegadas por el interior de la esfera , manteniendo la equivalencia topológica . (ver figura 8) .

Esfera con g "asaa"

Esfera con un "asa" de g+1 "patas" .

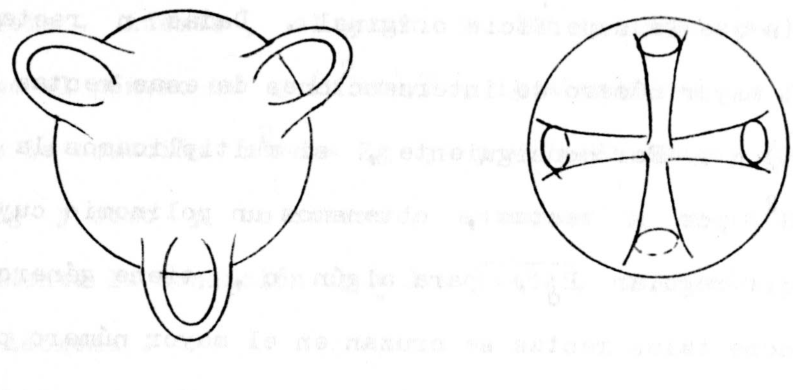


fig. 8

De modo que si construimos un asa múltiple como la que se indica en la figura 9 , el género de la superficie estará determinado por el número de cortes sumado a la mitad de las intersecciones son la esfera .

fig. 9

Esta asa múltiple la podemos estrechar convirtiéndola en rectas que se intersectan , y la superficie obtenida (la esfera intersectada por rectas) tendrá el mismo tipo de homotopía que la superficie original . Dadas n rectas L_i , el mayor número de intersecciones de esas rectas es $g = (\frac{n-1}{2})\, n$. Por consiguiente , si multiplicamos la esfera S^2 por n rectas , obtenemos un polinomio cuya superficie regular P_c , para algún c , tiene género g , y como tales rectas se cruzan en el mayor número posible de intersecciones , g es el mayor género posible .

Debido a que el polinomio tiene grado 2n+2 (2n por las n rectas , y 2 más por la esfera) , tenemos que :

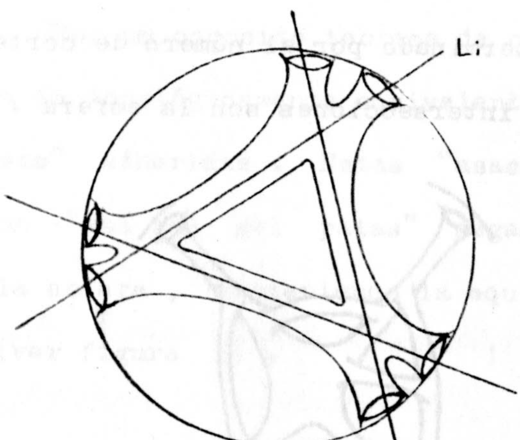


fig. 10

Las n rectas se intersectan en $(\frac{n-1}{2})$ n puntos, luego el género de la superficie es igual a ese número de puntos más n , que son los cortes de las rectas con la esfera . Además , el grado p del polinomio es $p=2n+2$. Como el género es $g=(n^2+n)/2$, igualando con p , obtenemos la ecuación $n^2+n = 2g$ y $p = 2n+2$ luego $(p-1)^2 = 1+8g$ y como p es entero , entonces p satisface necesariamente la condición $p \geq 1 + \sqrt{1+8g}$, quedando demostrado el teorema .

Supongamos , por ejemplo , que queremos construir una superficie de género $g = 1$. Entonces , por el primer método , el polinomio tendrá grado $p = 4$. Por el segundo método , el polinomio también tendrá grado 4 . Pero de aquí en adelante se reduce ostensiblemente el grado . Así , si $g = 10$, entonces $p = 2(10)+2 = 22$, pero aplicando el último método , podemos construir un polinomio de grado $p = 1 + \sqrt{1+(10)8} = 10$ cuya superficie regular tiene género 10 . La disminución del grado del polinomio a medida que el género aumenta se puede ilustrar en el siguiente cuadro :

Género	0	1	2	3	10	18
Grado	2	4	6	8	22	38
Mínimo	2	4	5	6	10	13

En donde el tercer renglón indica el grado mínimo que puede tener un polinomio P para que la superficie P_c tenga género g .

+Este tema me fué sugerido por el profesor Thomas Banchoff , Universidad de Brown .

BIBLIOGRAFIA :

(1) Spivak,M., Calculus on Manifolds , W.A. Benjamín , Inc , 1965 .

(2) Wallace , G. , Diferential Topology , W.A. Benjamín Inc , 1968 , cap 7 .

Kemel , George .