Boletín de Matemáticas
Vol. XIII, Nos 2,3,4 (1979), pags , 111 - 118

COMENTARIOS DE "NOTA SOBRE LA NOCION DE DEFINICION" +

RAFAEL ISAACS

Empezando por la presentación del artículo me parece que sería conveniente utilizar los siguientes mecanismos para lograr que sea asequible a un número mayor de personas .

Primero , mostrar ejemplos concretos de nuestra práctica pedagógica , en donde se resalte la necesidad de aclarar qué es la definición en matamáticas . Por ejemplo , es muy frecuente encontrar alumnos que se preguntan por qué las definiciones no se demuestran , mientras hay otros que "demuestran" las definiciones ; y esto no es de extrañar cuando se presentan a veces , definiciones que son mucho menos "naturales" que cualquier teorema .

En segundo lugar , sería bueno contraponer otra concepción diferente acerca del problema , buscando situar al lector en la discusión . Me parece una concepción generalizada que la definición tenga carácter de abreviatura ; esta concepción considera que las definiciones no son parte integral de la teoría ya que no agregan nada en cuanto a lo que se afirma sobre el universo del que se habla , y que solamente facilitan la noción , aumentando el número de signos usados pero disminuyendo la longitud de las proposiciones . Así la definición tendría que ver con el lenguaje sin interpretar , pero no con el valor de verdad que se dé a las proposiciones . Esta concepción tiene sus inconvenientes pedagógicos frente a la concepción presentada en el artículo ya que , al no introducir la definición como un principio primitivo , que se acepta porque corresponde a una realidad que se analiza , los axiomas son muy pocos , y frecuentemente poco utilizados directamente , y el alumno no logra captar el sentido de la deducción matemática . Si se hace énfasis en la definición como un axioma , se hace una división más clara de las proposiciones ciertas de una teoría : los conceptos primitivos y los conceptos deducidos.

Naturalmente , decir que las definiciones son axiomas , hacer énfasis en que ellas representan conceptos primitivos , no es condición suficiente para asegurar la comprensión del proceso deductivo matemático , que es uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la matemática . Buscando este objetivo , complementaría bastante el contenido del artículo el recalcar sobre el origen de las definiciones , algo así como responder de dónde provienen y cómo se construyen . A muchos alumnos se le presentan definiciones tan complicadas que naturalmente se preguntan por qué éstas se dan , es decir , de dónde vienen . Muchos profesores esquivan el problema y contestan que las definiciones son arbitrarias , y que por lo tanto ni se demuestran , ni se discuten . Realmente , la razón de las definiciones no se encuentra en la parte meramente formal de la matemática ; por ello , las definiciones no se justifican como los teoremas por medio de demostraciones , pero ésto no implica que de ellas nada se pueda decir . Las definiciones , como los axiomas, nacen de situaciones en las cuales se observan ciertos objetos que cumplen ciertas propiedades formales . En otras palabras , los objetos a los que se refiere una teoría matemática son abstracciones de otros objetos que aparecen más "concretos" . En lo fundamental , de abstracciones sobre dichos concretos nacen los conceptos primitivos : las definiciones y los axiomas . Viendo el ejemplo del artículo , señalamos que el concepto de abierto nace de la observación de ciertos casos en donde se encuentran ciertos conjuntos que cumplen unas propiedades comunes. Más explícitamente, hay ciertos objetos, la recta real, el plano euclideano, el espacio tridimensional, los "concretos", en donde se detectan ciertos conjuntos (en la recta real, las uniones de intervalos abiertos; en el plano euclideano, las uniones de discos abiertos; etc.). Estos conjuntos serán llamados abiertos y los objetos donde podemos encontrar abiertos, se llamarán espacios topológicos. En general, los objetos donde se puede aplicar una teoría se llaman modelos de la teoría. Por otro lado, existe una cantidad de signos que se combinan según ciertas leyes y que representan objetos del modelo o de los posibles modelos. Igualmente existe una cantidad de propiedades en los modelos que son expresadas con esos signos, es decir, las propiedades de los modelos se escriben en el lenguaje de la teoría "trivial". Para el caso analizado nos damos cuenta que en todos los casos de espacios topológicos, la intersección finita de los conjuntos que habíamos llamado abiertos, es uno de esos conjuntos. Vemos también, que la unión de abiertos es un abierto;

que la intersección de complementos de abiertos , es el complemento de un abierto , etc. Estas propiedades son expresadas por combinaciones de signos , fórmulas del lenguaje de la teoría , lenguaje que para el caso de la topología , es el lenguaje de la teoría de conjuntos . Las propiedades , así expresadas , tienen una característica muy importante : a saber , unas se pueden deducir de otras por manipulaciones casi mecánicas de las fórmulas , independientemente de los modelos , haciendo posible ordenarlas de tal forma que todas aparezcan como deducción de unas pocas llamadas axiomas . Esta característica , el desarrollarse sin recurrir a los modelos que lo originan , es en gran parte la gracia del lenguaje matemático y a su vez la desgracia ; pues muchas veces en la práctica , se considera que la actividad matemática se reduce a la manipulación mecánica de las fórmulas , olvidándose de establecer una relación entre el lenguaje y los modelos . Desde este punto de vista si se quiere introducir un nuevo signo , habrá que dar una fórmula que caracterice los objetos que se quieren representar por ese signo . Es decir , primero se detectan en los modelos ciertos objetos a definir , luego se busca una propiedad tal que dichos objetos sean los únicos que la cumplen , para después formular esta propiedad en el lenguaje de la teoría . Así se obtiene una fórmula que contenga el nuevo signo , fórmula que llamamos definición de tal signo , y que es aceptada como un axioma . En el caso de los espacios topológicos , si queremos introducir un nuevo término , por ejemplo ser cerrado , primero que todo debemos detectar los objetos que queremos calificar como cerrados , es decir recurrir a los modelos . Intuitivamente , los cerrados son conjuntos que contienen su "frontera" , pero en nuestra teoría no hemos hablado de fronteras , únicamente hemos hablado de conjuntos abiertos . Debemos buscar una propiedad que nos caracterice los objetos detectados , de tal forma que la propiedad no incluya signos que no hayan sido previamente introducidos . A partir de diferentes reflexiones , podemos llegar a ver que aquellos conjuntos que vamos a llamar cerrados tienen todos una característica : su complemento es un conjunto de los llamados abiertos . Por esta razón , arbitrariamente , pero no tan arbitrariamente, definimos conjunto cerrado como aquel cuyo complemento es abierto . Digo arbitrariamente porque en lugar de llamarlos cerrados los hubiera podi do llamar conjuntos completos o conjuntos bonitos , o bien , pudiera haber dado otra definición diferente (por ejemplo , definir punto de acumulación y luego conjunto cerrado) . Pero , la definición no es tan arbitraria puesto que previamente se había detectado lo que se quería definir .

Por último , se me hace que la concepción del artículo se podría complementar , tratando de diferenciar entre los axiomas corrientes y los axiomas-definición . Se me ocurren dos diferencias . Primero , a una teoría yo le agrego un axioma corriente , seguramente descarto una cantidad de modelos que se tenían para la teoría original , esto no sucede si yo agrego un axioma-definición . En segundo lugar , al agregar un axioma corriente a la teoría ésta se puede volver contradictoria , cosa que es imposible , en el caso de que el axioma agregado sea un axioma-definición . En el terreno de la matemática se encuentra el interesante problema de caracterizar los axiomas-definición y probablemente se pueda llegar a aclarar lo relacionado con la forma que deben tener los axiomas-definición .

+Este es un comentario a propósito de la "Nota sobre la noción de definición" aparecida en este mismo volumen en la página 100 .

Rafael Isaacs .
Departamento de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga - Colombia .