Boletín de Matemáticas
Vol. XIII (1979), págs, 63 - 70

LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

por

Helmut Knolle

Los polinomios de Legendre se definen así:

$$P_o = 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Como $u = (x^2-1)^n = x^{2n}+\ldots$ es un polinomio de grado $2n$, entonces P_n es de grado n. El factor $\frac{1}{2^n n!}$ se escoge para que $P_n(1) = 1$.

<u>Teorema 1</u>. P_n satisface la ecuación diferencial

$$(x^2-1)\, y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0 \;,\; n = 0,1,\ldots \tag{1}$$

<u>Demostración</u>. Para $n = 0$ es trivial. Para $n \geqslant 1$ se define $u = (x^2-1)^n$. Entonces $u' = 2nx(x^2-1)^{n-1}$ y

$$(x^2-1)u' = 2n\, x\, u \tag{2}$$

Derivando (2) n+1 veces y aplicando la fórmula de Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

obtenemos:

$$(x^2-1)\, u^{(n+2)} + \binom{n+1}{1} (x^2-1)'\, u^{(n+1)} + \binom{n+1}{2} (x^2-1)''$$

$$u^{(n)} = (2nx)\, u^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} 2n\, u^{(n)}$$

de donde

$$(x^2-1)\, u^{(n+2)} + [2(n+1)-2n] x\, u^{(n+1)}$$

$$+ [(n+1)n-(n+1)2n]\, u^{(n)} = 0$$

y finalmente

$$(x^2-1)u^{(n+2)} + 2xu^{(n+1)} - n(n+1)u^{(n)} = 0$$

Por lo tanto, $p_n = \dfrac{1}{2^n n!}\, u^{(n)}$ satisface (1).

<u>Teorema 2</u>. Para n fijo, P_n es, salvo un factor

constante, el único polinomio que satisface (1) en el intervalo $(-1,1)$.

<u>Demostración</u>: (1) se puede escribir en la forma

$$y'' + \frac{2x}{x^2-1}y' - \frac{n(n+1)}{x^2-1}y = 0$$

Sea Q otro polinomio que cumple (1). Entonces el Wronskiano $W(P_n,Q) = \begin{vmatrix} P_n & Q \\ P_n' & Q' \end{vmatrix}$ es un polinomio,

pero $W = c\, e^{-\int 2x/x^2-1\, dx} = c\, e^{-\log(x^2-1)} = c\dfrac{1}{|x^2-1|}$

no es un polinomio a menos que $c = 0$. Luego $w = 0$. Sea x_o tal que $P_n(x_o) \neq 0$. Como $w \equiv 0$, el sistema

$$\alpha P_n(x_o) + \beta Q(x_o) = 0$$

$$\alpha P_n'(x_o) + \beta Q'(x_o) = 0$$

tiene una solución no trivial (α,β), con $\beta \neq 0$ (pues $\beta = 0$ y $P_n(x_o) \neq 0$ implican $\alpha = 0$).

Definamos $R(x) = \alpha P_n + \beta Q$. R satisface (1) y $R(x_o) = R'(x_o) = 0$. Por el teorema de unicidad (para ecuaciones diferenciales) obtenemos $R = \alpha P_n + \beta Q \equiv 0$ en $(-1,1)$. Por lo tanto $Q = -\frac{\alpha}{\beta} P_n$.

<u>Teorema 3</u>. Es válida la relación $\int_{-1}^{1} P_m P_n\, dx = 0$ $(m \neq n)$.

<u>Demostración</u>: Escribamos (1) en la forma

$((x^2-1)y')' - n(n+1)y = 0$. P_m y P_n satisfacen

$$((x^2-1)P_m')' - m(m+1)\,P_m = 0$$

$$((x^2-1)P_n')' - n(n+1)\,P_n = 0$$

Multiplicación e integración nos dan

$$(x^2-1)P_m'P_n \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x^2-1)P_m'P_n'\,dx - m(m+1)\int_{-1}^{1} P_m P_n = 0$$

$$(x^2-1)P_n'P_m \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x^2-1)P_n'P_m'\,dx - n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m P_n\,dx = 0$$

Considerando que $x^2-1 = 0$ para $x = \pm 1$ y restando la 2^a fórmula de la primera obtenemos

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^{1} P_m\, P_n\,dx = 0$$

y puesto que $m \neq n$, $\int_{-1}^{1} P_m\, P_n\,dx = 0$

En la demostración del teorema siguiente usaremos el hecho (fácil de comprobar por inducción) de que cada polinomio de grado n puede representarse como combinación lineal de $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

<u>Teorema 4</u>. Para cualquier polinomio Q_{n-1} de grado $\leq n-1$ se cumple $\int_{-1}^{1} P_n\, Q_{n-1}\,dx = 0$.

Demostración: Existen números reales λ_i tal que

$Q_{n-1} = \lambda_o + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{n-1} P_{n-1}$.

Entonces, según el Teorema 3,

$$\int_{-1}^{1} P_n\, Q_{n-1}\, dx = \int_{-1}^{1} P_n(\lambda_o + \lambda_1 P_1 + \ldots \lambda_{n-1} P_{n-1})dx = 0$$

Teorema 5. P_n tiene n ceros en $[-1,1]$.

Demostración: Como P_n es solución no trivial de una ecuación diferencial de orden 2, $P_n(a) = 0$ implica $P_n'(a) \neq 0$. Supongamos que P_n tiene solo $k < n$ ceros $x_1, \ldots, x_k$ en $[-1,1]$. Entonces $P_n'(x_i) \neq 0$, es decir P_n cambia de signo en x_i $(i = 1, \ldots, k)$. El polinomio $\Pi_k = (x-x_1)\ldots(x-x_k)$ es de grado k y también cambia de signo en los puntos $x_1, \ldots x_k$ y sólo en ellos. Por lo tanto $P_n \Pi_k$ no cambia de signo en $[-1,1]$, luego $\int_{-1}^{1} P_n \Pi_k\, dx \neq 0$. Pero esto contradice el Teorema 4 ya que Π_k es de grado $k < n$.

Vamos a considerar la aplicación de los polinomios de Legendre en la Física Matemática y en el Análisis Numérico.

En coordenadas esféricas γ, φ, θ $(0 \leq \varphi < 2\Pi$, $0 \leq \Theta < \Pi)$ la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ toma la forma:

$$(\gamma^2\, u_\gamma)_\gamma + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,(u_\theta \operatorname{sen}\theta)_\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\, u_{\varphi\varphi} = 0 \qquad (3)$$

Si buscamos una solución independiente de φ, aplicando la separación de las variables γ y θ, entonces obtenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(\gamma^2\, v')' - \lambda v = 0 \qquad \left(' = \frac{d}{d\gamma}\right) \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,(y' \operatorname{sen}\theta)' + \lambda y = 0 \qquad \left(' = \frac{d}{d\theta}\right) \qquad (5)$$

Por la sustitución $x = \cos\theta$, la ecuación (5) se transforma en

$$((x^2-1)\, y')' - \lambda y = 0 \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (6)$$

Se puede demostrar que (6) tiene una solución no trivial que satisface las condiciones de frontera de ser continua en $x = \pm 1$, si y sólo si $\lambda = n(n+1)$. Los números $n(n+1)$ son los valores propios de este problema de valores de frontera "singular" y P_n es la función propia que pertenece a $\lambda = n(n+1)$. Para la integración numérica de una función f sobre el intervalo $[-1, 1]$ sea $\mathcal{P}$ una partición de dicho intervalo, es decir

$$\mathcal{P} : -1 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$$

Si f es contínua, denotamos con $[f]_{\mathcal{P}}$ el único polinomio de grado $n-1$ que coincide con f en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como la integración de un polinomio es un proceso elemental, se hace la aproximación

$$\int_{-1}^{1} f \, dx \approx \int_{-1}^{1} [f]_P \, dx \qquad (7)$$

Se conoce la regla de Simpson, donde $n = 3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. La regla de Simpson da valores exactos para polinomios de grado 2, y en general, en (7) se cumple la igualdad si f es un polinomio de grado $\leqslant n-1$. Pero con una selección especial de los x_i se puede lograr un resultado mejor, como veremos en seguida.

<u>Teorema 6</u>. Sea P la partición que consiste de los n ceros del polinomio de Legendre P_n. Entonces para cada polinomio de grado $\leqslant 2n-1$ la aproximación (7) es una igualdad.

<u>Demostración</u>: Sea f de grado $\leqslant 2n-1$, y sea $g = [f]_P$. Entonces $f(x_i) - g(x_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Como $f-g$ es de grado $\leqslant 2n-1$ y tiene los ceros $x_1, \ldots, x_n$, se puede escribir

$$f-g = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)p_{n-1}(x)$$

donde p_{n-1} es un polinomio de grado $\leqslant n-1$. Además los ceros de $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ coinciden con los ceros de P_n, por lo tanto $f-g = c\, P_n p_{n-1}$, donde c es una constante.

Así obtenemos (ver Teorema 4)

$$\int_{-1}^{1} (f-g)\, dx = c \int_{-1}^{1} P_n p_{n-1}\, dx = 0 \quad \text{o sea}$$

$$\int_{-1}^{1} f\, dx = \int_{-1}^{1} g\, dx = \int_{-1}^{1} [f]_P\, dx$$

Nota: El método de integración numérica mencionada en el teorema anterior se llama cuadratura de Gauss.

(El presente artículo es el texto de una conferencia dictada en la Universidad Nacional en el segundo semestre de 1978).

***

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional
Bogotá. D.E.