Boletín de Matemáticas
Vol XII (1978), págs. 17 - 37

REPRESENTACION DE NUMEROS NO-CONVENCIONALES MEDIANTE COMPORTAMIENTOS ASINTOTICOS DE FUNCIONES REALES.

por

Yu Takeuchi

§ 0 Introducción.

En 1975 el Dr. Carlos Vasco dictó en el Depto. de Matemáticas de la U. Nal. una conferencia sobre "números no-convencionales" como parte del seminario de lógica matemática, la cual despertó cierto interés entre algunos profesores del Departamento. En la conferencia, mostró la construcción lógica del cuerpo de los números no-convencionales, por medio de los conjuntos de partes comenzando con R. Posteriormente, el Dr. Alonso Takahashi dictó una conferencia sobre el mismo tema, mostrando que se logra obtener el cuerpo de los números no-convencionales por medio de sucesiones reales, similar a la construcción de R por sucesión de Cauchy, utilizando el ultrafiltro de Frechet. Posteriormente expuse que los números no-convencionales pueden ser repre sentados mediante operadores hermíticos interpretándolos como cantidades físicas observables (*Rev. Col. Matemáticas, Vol. X pp 125-140*).

En la presente conferencia se trata de mostrar que los números no-convencionales pueden ser interpretados mediante los comportamientos asintóticos de funciones reales. La función constante del valor "a" representa el número real "a", una función que diverge hacia más infinito representa una cantidad infinita, y una función que tiende a cero representa una cantidad infinitesimal.

EXTRACTO

Sea $\mathcal{S}$ la colección de todas las funciones de valor real definidas en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{S}$ es un anillo de acuerdo con las operaciones comunes y corrientes. Se introduce en $\mathcal{S}$ un orden parcial en forma natural, es decir, decimos que $f \geqslant g$ si

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \text{para casi todo} \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Si $\mathfrak{F}$ es la colección de todos los conjuntos cuyos complementos son de medida nula, entonces

$$f \geqslant g \quad \text{si, y sólo si} \quad \{x \mid f(x) \geqslant g(x)\} \in \mathfrak{F} \qquad (2)$$

La colección $\mathfrak{F}$ de conjuntos es un filtro, entonces existe un ultra-filtro $\mathfrak{F}^*$ más fino que $\mathfrak{F}$. Mediante el ultrafiltro $\mathfrak{F}^*$ se introduce en $\mathcal{S}$ un orden total, así:

$$f \geqslant g \quad \text{si, y sólo si} \quad \{x \mid f(x) \geqslant g(x)\} \in \mathfrak{F}^* \qquad (3)$$

Mediante el orden $\geqslant$ se introduce en $\mathcal{S}$ la relación de equivalencia:

$$f \sim g \text{ si, y sólo si } f \geqslant g, \text{ y, } g \geqslant f. \tag{4}$$

El conjunto $\mathcal{J} = \{f \in \mathcal{S} \mid f \sim 0\}$ es un ideal primo maximal del anillo $\mathcal{S}$, luego el cociente $\mathcal{S}/\mathcal{J}$ es un cuerpo, esto es el cuerpo de los números no-convencionales donde cada elemento caracteriza el comportamiento asintótico de funciones en $\mathcal{S}$. Según el ultrafiltro $\mathfrak{F}^*$ empleado para introducir el orden total en $\mathcal{S}$ se presenta uno de los cuatro casos: el comportamiento asintótico cuando $x \to +\infty$, cuando $x \to -\infty$, cuando $x \to b^+$, y cuando $x \to b^-$ (para algún $b \in R$).

§ 1 Orden total en la colección de funciones reales.

Sea $\mathfrak{F}$ la colección de todos los conjuntos numéricos, S, tales que

$$\overline{m}\,(R - S) = 0\,, \tag{1}$$

entonces $\mathfrak{F}$ es un filtro de R. Sea $\mathfrak{F}^*$ un ultra filtro más fino que $\mathfrak{F}$. Sea $\mathcal{S}$ la colección de todas las funciones de valor real, definidas en R, entonces $\mathcal{S}$ es un anillo de acuerdo con las operaciones comunes y corrientes. Sea $f \in \mathcal{S}$. decimos que $f \geqslant 0$ si

$$\{x \in R \mid f(x) \geqslant 0\} \in \mathfrak{F}^*.$$

Naturalmente, si $f(t) \geqslant 0$ para casi todo $t \in R$ entonces se tiene que $f \geqslant 0$. Definimos que

$$f \geqslant g \quad \text{si, y solo si,} \quad f-g \geqslant 0. \tag{2}$$

Dadas $f, g \in \mathcal{S}$ tenemos que:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \geqslant g(x)\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \geqslant f(x)\} = \mathbf{R} \in \mathfrak{F}^*$$

luego:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \geqslant g(x)\} \in \mathfrak{F}^*, \quad \text{ó}, \quad \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \geqslant f(x)\} \in \mathfrak{F}^*$$

esto es,

$$f \geqslant g \,, \quad \text{ó}, \quad g \geqslant f. \tag{3}$$

Definimos:

$$f \sim g \quad \text{si, y solo si,} \quad f \geqslant g, \ \text{y}, \ g \geqslant f. \tag{4}$$

Evidentemente tenemos que:

$$f \sim g \quad \text{si, y solo si,} \ \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = g(x)\} \in \mathfrak{F}^* \tag{5}$$

Las siguientes propiedades son evidentes:

I. $f \sim g$ si, y sólo si, $f - g \sim 0$ (6)

II. " $\sim$ " es una relación de equivalencia

Decimos que $f > g$ si

$$f \geqslant g \,, \quad \text{y}, \quad f \not\sim g.$$

III. $f > g$ si, y sólo si, $\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) > g(x)\} \in \mathfrak{F}^*$ (7)

IV. $f \geqslant g$ si, y sólo si, $f > g$, ó, $f \sim g$. (8)

V. Si $f \leqslant g \leqslant h$ entonces $f \leqslant h$.

V'. Si $g \geqslant 0$, y, $h \sim g$ entonces $h \geqslant 0$.

VI. Si $f < g \leqslant h$ entonces $f < h$.

VI'. Si $g > 0$, y, $h \sim g$ entonces $h > 0$

VII. Si $f \leqslant g$ entonces $f + h \leqslant g + h$.

VIII. Si $f \leqslant g$, y, $h \geqslant 0$ entonces $f \cdot h \leqslant g \cdot h$

IX. Si $f \geqslant 0$, y, $g \geqslant 0$ entonces $\text{Mín}(f,g) \geqslant 0$

X. Si $f \leqslant g$, y, $h \leqslant 0$ entonces $f \cdot h \geqslant g \cdot h$.

XI. Si $g \sim 0$ entonces $f \cdot g \sim 0$ para todo $f \in \mathcal{S}$ (9)

XII. Si $f \cdot g \sim 0$ entonces $f \sim 0$, ó, $g \sim 0$. (10)

XIII. Si $f < g$, y, $h > 0$ entonces $f \cdot h < g \cdot h$

XIV. Si $f \not\sim 0$ existe $f_1 \in \mathcal{S}$ tal que $f \sim f_1$, $\frac{1}{f_1} \in \mathcal{S}$

<u>Demostración</u>: $\{x \in R \mid f(x) = 0\} \notin \mathfrak{F}^*$, luego $\{x \in R \mid f(x) \neq 0\} \in \mathfrak{F}^*$, definimos

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

entonces $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in R$, y $f_1 \sim f$. ∎

XV. Sea $\mathcal{J} = \{f \in \mathcal{S} \mid f \sim 0\}$ entonces $\mathcal{J}$ es un ideal primo y maximal del anillo $\mathcal{S}$.

<u>Demostración</u>: Por XI, se ve que $\mathcal{J}$ es un ideal. Por XII, $\mathcal{J}$ es un ideal primo.

Ahora, supongamos que existe un ideal $\mathcal{J}^*$ tal que $\mathcal{J}^* \underset{\neq}{\supset} \mathcal{J}$. Existe $f \in \mathcal{J}^*$ tal que $f \not\sim 0$. Por XIV existe $f_1 \in \mathcal{S}$ tal que $f_1(x) \neq 0$ para todo $x \in R$, y $f \sim f_1$. Como $f_1 = (f_1 - f) + f$ entonces $f_1 \in \mathcal{J}^*$ y $\frac{1}{f_1} \in \mathcal{S}$, así que $\mathcal{J}^* = \mathcal{S}$. ∎

De la propiedad XV. la clase cociente $\mathbf{R}^* = \mathcal{S}/\mathcal{J}$ es un cuerpo, que es un cuerpo de números **no-convencionales** puesto que $\mathcal{S} = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (una potencia del cuerpo real R[2]. La clase representada por la función f se denota por $[f]$. Dado $a \in R$, la clase representada por la función constante a la denotamos nuevamente por a, en esta forma R es un subcuerpo de R^* (o sea, R^* es una extensión de R).

Definimos en R^* el valor absoluto $|[f]|$ como sigue:

$$|[f]| = \begin{cases} [f] & \text{si} \quad f \geq 0 \\ [-f] & \text{si} \quad f < 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Nótese que $|[f]|$ es una clase de funciones no-negativas (ver la propiedad V').

Decimos que $[f]$ es un infinitesimal si

$$|[f]| < a \quad \text{para todo} \quad a > 0 \text{ real.} \qquad (12)$$

Decimos que $[f]$ es un infinito si

$$|[f]| > a \quad \text{para todo} \quad a > 0 \text{ real.} \qquad (13)$$

§ 2 Existencia de infinitesimal e infinito.

Dado a real, como $(-\infty, a] \cup [a, \infty) = R \in \mathfrak{F}^*$ se tiene que

$$(-\infty, a] \in \mathfrak{F}^*, \text{ ó, } [a, \infty) \in \mathfrak{F}^*. \qquad (14)$$

Para mayor sencillez supongamos que

$$[a, \infty) \in \mathfrak{F}^*,$$

entonces el conjunto $B = \{x \in R \mid [x, \infty) \in \mathfrak{F}^*\}$ no es vacío, sea

$$b = \operatorname{Sup} B = \operatorname{Sup} \{x \in R \mid [x, \infty) \in \mathfrak{F}^*\}.$$

Se presentan las tres siguientes posibilidades:

(i) Primer caso, $b = +\infty$,

Existe una sucesión creciente de números reales, $\{x_n\}$, tales que

$$[x_n,\infty) \in \mathfrak{F}^*, \qquad x_n \to +\infty, \tag{15}$$

entonces $[e^x]$ es un infinito, y $[e^{-x}]$ es un infinitesimal.

Demostración: Dado $a>0$ (real) existe x_n tal que

$$e^x > a \qquad \text{para todo} \qquad x > x_n ,$$

esto es,

$$\{x\in\mathbb{R} \mid e^x > a\} \supseteq [x_n, \infty) ,$$

por lo tanto;

$$\{x\in\mathbb{R} \mid e^x > a\} \in \mathfrak{F}^*$$

o sea que $[e^x] > [a] = a$.

Evidentemente, $[e^{-x}] = \dfrac{1}{[e^x]}$ es un infinitesimal. ∎

Comportamiento asintótico de la función.

Sean $f,g \in \mathcal{S}$ supongamos que existe el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \{g(x) - f(x)\} = c$$

entonces:

1) $[f]-[g]$ es un infinitesimal si, y solo si, $c=0$.

2) $[f]<[g]$, y $[g]-[f]$ no es un infinitesimal si, y sólo si, $c>0$.

Demostración: Supongamos que $\lim_{x\to\infty}\{g(x)-f(x)\}= c>0$, entonces existe x_n (ver (15)) tal que

$$g(x)-f(x) > \frac{1}{2}c \quad \text{para todo} \quad x > x_n ,$$

esto es:

$$\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)-f(x) > \frac{1}{2}c\} \supseteq [x_n,\infty) ,$$

luego:

$$\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)-f(x) > \frac{1}{2}c\} \in \mathfrak{F}^* .$$

por lo tanto se tiene que $[g] > [f] + \frac{1}{2}c$.

Ahora, supongamos que $\lim_{x\to\infty}\{g(x)-f(x)\}= c = 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ (real) cualquiera existe x_n tal que

$$|g(x)-f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x > x_n ,$$

luego:

$$|[g-f]|=|[g]-[f]| < \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ real},$$

esto es, $[g] - [f]$ es un infinitesimal. ∎

Nota: Todo intervalo $[a,\infty)$ pertenece a $\mathfrak{F}^*$ puesto que existe

$$x_n > a, \quad [x_n,\infty) \in \mathfrak{F}^* .$$

(ii) Segundo caso, $b \neq +\infty$, y $[b,\infty) \in \mathfrak{F}^*$.

Para todo $t > b$ se tiene que $[t,\infty) \notin \mathfrak{F}^*$, así que

$$(-\infty,t) \in \mathfrak{F}^* \quad \text{para todo} \quad t>b. \tag{16}$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$[b,t) = [b,\infty) \cap (-\infty,t) \in \mathfrak{F}^* \quad \text{para todo} \quad t>b$$

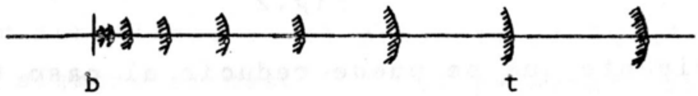

Fig. 1

Se puede demostrar fácilmente que (Apéndice 1) $[x-b]$ es un infinitesimal y $\left[\frac{1}{x-b}\right]$ es un infinito. Nótese que la función $\frac{1}{x-b}$ no está definida en $x = b$, pero la clase $\left[\frac{1}{x-b}\right]$ está bien definida puesto que un sólo punto (más generalmente, un conjunto de medida nula) no tiene importancia alguna para la clase de funciones en R^*.

Este caso (ii) puede reducirse al caso (i) haciendo un cambio elemental:

$$x' = \frac{1}{x-b} \quad .$$

(iii) <u>Tercer</u> <u>caso</u>: $b \neq +\infty$, y $[b,\infty) \notin \mathfrak{F}^*$.

Tenemos que $(-\infty,b) \in \mathfrak{F}^*$. Existe una sucesión creciente $\{x_n\}$ que tiende a b tal que

$$[x_n, \infty) \in \mathfrak{F}^* \quad \text{para todo} \quad n, \tag{17}$$

luego

$$[x_n,b) = [x_n,\infty) \cap (-\infty,b) \in \mathfrak{F}^* \quad \text{para todo} \quad n \ .$$

Se puede demostrar inmediatamente que (Apéndice 2)

$[b - x]$ es un infinitesimal y $[\frac{1}{b-x}]$ es un infinito.

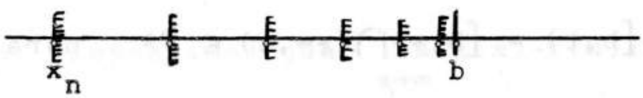

Fig. 2

Es evidente que se puede reducir al caso (i) haciendo un cambio del tipo:

$$x' = \frac{1}{b-x}$$

<u>Nota</u>: En (ii) y (iii), una función f, continua en b, representa en R^* el número real "f(b)", ó el número no-convencional "f(b) + un infinitesimal".

<u>Nota</u>: El orden en R^* depende únicamente del comportamiento de las funciones en una vecindad de un sólo punto (en (i) en la vecindad de $+\infty$, en (ii) o en (iii) en la vecindad del punto b).

Dada $f \in \mathscr{S}$, si f no es un infinito entonces existen $M_1, M_2 \in R$ tales que

$$M_2 \leqslant [f] \leqslant M_1 .$$

Sean

$$b = \text{Inf}\,\{x \in R \mid [f] \leqslant x\}$$

$$a = \text{Sup}\,\{x \in R \mid x \leqslant [f]\}$$

Si $a \neq b$ existiría un $c \in R$, $a<c<b$, esto es imposible puesto que $[f] \leqslant c$, ó, $c \leqslant [f]$. Así que $a = b$, por lo tanto tenemos que $a-[f]$ es el cero, ó es un infinitesimal. Esto es:

Todo número infinito en R^* es igual a " un real" o " un real + un infinitesimal".

§ 3 Números no-convencionales por sucesiones.

Para mayor sencillez, en el presente parágrafo consideremos siempre el caso (i) del parágrafo anterior:

$$\operatorname{Sup}\{x\in R \mid [x,\infty) \in \mathfrak{F}^*\} = +\infty, \tag{18}$$

Sea $\mathcal{S}_o$ la colección de todas las funciones escalonadas de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_{[n,n+1)} \tag{19}$$

donde $\phi_{[n,n+1)}$ es la función característica del intervalo $[n,n+1)$, entonces, el orden en $\mathcal{S}$ induce un orden entre sucesiones numéricas, como sigue:

Dadas dos sucesiones numéricas (a_n) y (b_n) decimos que $(a_n) \geqslant (b_n)$ si, y sólo si,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_{[n,n+1)}. \tag{20}$$

Sea $\mathfrak{F}_r$ la colección de partes de N de la forma:

$$\{n\in N \mid a_n \geqslant 0 \quad \text{para algún} \quad (a_n) \geqslant 0\} \tag{21}$$

entonces se puede demostrar que (Apéndice 3) $\mathfrak{F}_r$ es un ultrafiltro de Frechet de N. De esta manera, tenemos que:

$$(a_n)\geqslant 0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad \{n\in\mathbb{N}\,|\,a_n\geqslant 0\}\in\mathcal{F}_r \tag{22}$$

y, $\mathcal{E}_{o/\sim}$ es evidentemente isomorfo al cuerpo de nú meros no-convencionales construído por sucesiones numéricas.(1)

Dado ε real, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, uno de los siguientes conjuntos:

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n-\varepsilon, n] \quad , \quad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+\varepsilon]$$

no pertenece a $\mathcal{F}^*$ puesto que $B\cap D = \phi$. Supongamos que

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n-\varepsilon, n] \notin \mathcal{F}^* ,$$

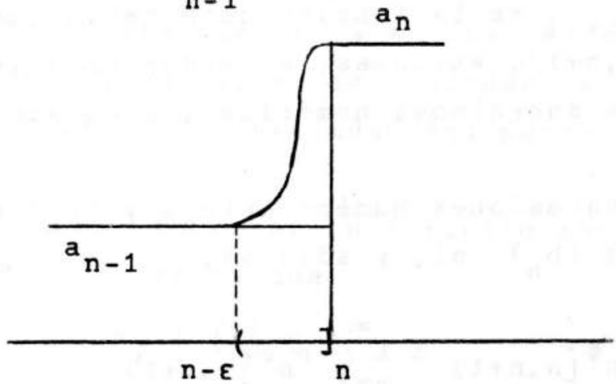

Fig. 3

entonces suavizando la función escalonada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)}$ en los intervalos $(n-\varepsilon, n]$, $n = 1,2,3,\ldots$ se obtiene una función continua f (más generalmente, se puede obtener una función de la clase (C^{∞})) tal que

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)} \quad (f \in \mathcal{C}) \tag{23}$$

donde $\mathcal{C}$ es la clase de todas las funciones continuas. Tenemos entonces:

$$\mathcal{S}/\sim \ \supseteq \ \mathcal{C}/\sim \ \supseteq \ \mathcal{S}_0/\sim \tag{24}$$

Para todo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)} \in \mathcal{S}_0$ se tiene que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid e^x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)}\}$ es de medida nula (contable!), luego:

$$e^x \not\sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)} \ ,$$

esto es,

$$\mathcal{C}/\sim \ \supsetneq \ \mathcal{S}_0/\sim \tag{25}$$

Esto es, el cuerpo de números no convencionales construído por sucesiones numéricas es un sub-cuerpo propio de $\mathbb{R}^*$ obtenido en § 1.

A partir de un ultrafiltro $\mathfrak{F}^*$ de $\mathbb{R}$ se ha inducido un ultrafiltro de Frechet $\mathfrak{F}_r$ de $\mathbb{N}$. Recíprocamente dado un ultrafiltro de Frechet de $\mathbb{N}$, $\mathfrak{F}_r$, existe un ultrafiltro de $\mathbb{R}$, $\mathfrak{F}^*$, el cual induce a $\mathfrak{F}_r$ (Apéndice 4).

§ 4 La colección de funciones medibles según Lebesgue.

Sea $\mathfrak{F}_o$ la colección de todos los conjuntos, S, tales que

$$\overline{m}\,(R - S) \text{ es finito,}$$

entonces evidentemente $\mathfrak{F}_o$ es un filtro de R más fino que $\mathfrak{F}$ (utilizado en §1). Sea $\mathfrak{F}^*$ un ultrafiltro más fino que $\mathfrak{F}_o$, entonces se demuestra que (Apéndice 5) sólo se presenta la posibilidad del caso (i) del parágrafo 2.

Lema: Sea f una función medible según Lebesgue, entonces f es equivalente a una función medible-L y acotada en cualquier intervalo acotado.

Demostración: Para mayor sencillez, supongamos que $[f]\geqslant 0$, sea

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1, \text{ ó } f(x)<0 \\ f(x) & \text{si} \quad f(x)\geqslant 0, \quad x\geqslant 1 , \end{cases}$$

entonces $f \sim f_1$ puesto que

$$[1,\infty) \in \mathfrak{F}^* \text{ , y, } \{x\in R \mid f(x)\geqslant 0\} \in \mathfrak{F}^*.$$

Dado $n \in N$, sean

$$e_k^{(n)} = \{x\in[n,n+1) \mid f_1(x)>k\} \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

entonces

$$e_1^{(n)} \supseteq e_2^{(n)} \supseteq e_3^{(n)} \supseteq \ldots \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} e_k^{(n)} = \phi ,$$

Por lo tanto se tiene que $m(e_k^{(n)}) \to 0$ cuando $k \to \infty$, luego existe $k(n)$ tal que

$$m(e^{(n)}_{k(n)}) < (\frac{1}{2})^n ,$$

Sea $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} e^{(n)}_{k(n)}$, entonces $m(B) < \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 1$,

luego $B \notin \mathfrak{F}^*$. Definimos f_2 como sigue:

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad x \in \mathbf{R}-B \\ 0 & \text{si} \quad x \in B. \end{cases}$$

entonces se tiene que $f_2 \sim f_1 \sim f$ puesto que $\mathbf{R}-B \in \mathfrak{F}^*$. Evidentemente f_2 es medible-L, y acotada en $(-\infty,n)$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Sea f una función medible-L, para mayor sencillez podemos suponer que f es acotada en $(-\infty, n)$ para todo n. Sea

$$G(x) = \int_1^x f(t)\,dt \tag{26}$$

entonces se tiene que G es continua y que

$$f(x) = G'(x) \quad \text{para casi todo} \quad x \in \mathbf{R}, \tag{27}$$

o sea

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{G(x+ \frac{1}{n})-G(x)}{\frac{1}{n}} \quad \text{(casi toda parte)} \tag{28}$$

Por el teorema de Egoroff, la convergencia en (28) es uniforme salvo en un conjunto de medida muy pequeña. Como G es continua, f también lo es salvo en un conjunto de medida exterior finita, digamos, f es continua en $\mathbf{R}-T$ con $\overline{m}(T)$ = finita . Existe un abierto

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \supseteq T$$

tal que

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \neq \infty .$$

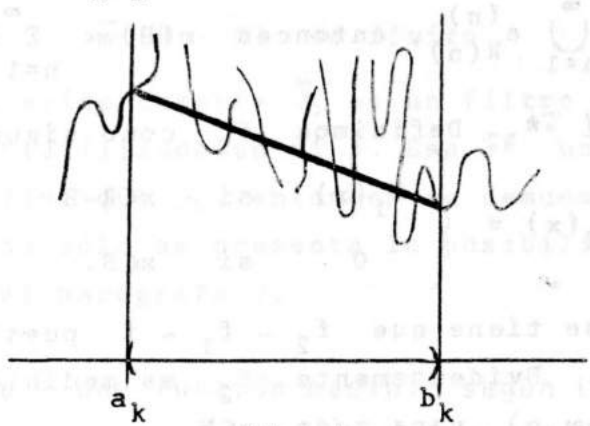

Fig. 4

Modificando la función f dentro del conjunto A en la forma continua (Fig.4) se obtienen una función f^*, continua en $\mathbb{R}$, y $f \sim f^*$ (ya que $A \not\subset \mathcal{F}^*$). Así, se tiene que

$$\mathcal{L}/\sim \quad = \quad \mathcal{C}/\sim$$

donde $\mathcal{L}$ es la colección de todas las funciones medibles según Lebesgue.

En conclusión, obtenemos:

$$\mathbb{R}^* = \mathcal{S}/\sim \ \supseteq \mathcal{L}/\sim \ = \mathcal{C}/\sim \ \underset{\neq}{\supset} \mathcal{S}_0/\sim \ \underset{\neq}{\supset} \mathbb{R} .$$

APENDICE 1

Dado $\varepsilon > 0$ real cualquiera, $[b, b+\varepsilon) \in \mathcal{F}^*$, luego

$$\{x \mid 0 \leq x-b < \varepsilon\} \in \mathcal{F}^*$$

puesto que $\{x | 0 \leqslant x-b < \varepsilon\} \supseteq [b, b+\varepsilon)$, esto es:

$$0 \leqslant [x - b] < [\varepsilon] = \varepsilon \quad .$$

Como $[x-b]$ es un infinitesimal positivo, entonces $[\frac{1}{x-b}]$ es un infinito positivo. ∎

APENDICE 2

Dado $\varepsilon > 0$ real, existe x_n tal que $b-\varepsilon < x_n$, luego:

$$\{x \mid 0 < b-x < \varepsilon\} \in \mathcal{F}^* \text{ puesto que }$$

$$\{x \mid 0 < b-x < \varepsilon\} \supseteq [x_n, b).$$

Esto es, $[b-x]$ es un infinitesimal positivo, luego $[\frac{1}{b-x}]$ es un infinito. ∎

APENDICE 3

(i) Si $S \in \mathcal{F}_r$ existe $(a_n) \geqslant 0$ tal que

$$S = \{n \in \mathbf{N} | a_n \geqslant 0\}$$

Si $T \supseteq S$, $T \subseteq \mathbf{N}$, definimos (b_n) como sigue:

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad n \notin T \\ |a_n| & \text{si} \quad n \in T \end{cases}$$

entonces $T = \{n \in \mathbf{N} | b_n \geqslant 0\}$, y

$$\Sigma\, b_n \phi_{[n,n+1)} \geqslant \Sigma\, a_n \phi_{[n,n+1)} \geqslant 0,$$

o sea que $(b_n) \geqslant 0$, esto es, $T \in \mathcal{F}_r$.

(ii) Si $S,T \in \mathfrak{F}_r$, entonces existen $(a_n) \geqslant 0$, $(b_n) \geqslant 0$ tales que

$$S = \{n \in \mathbf{N} \mid a_n \geqslant 0\}, \quad T = \{n \in \mathbf{N} \mid b_n \geqslant 0\}.$$

Sea $\Sigma\, c_n \phi_{[n,n+1)}$ la mínima de $\Sigma\, a_n \phi_{[n,n+1)}$ y $\Sigma\, b_n \phi_{[n,n+1)}$ entonces $\Sigma\, c_n \phi_{[n,n+1)} \geqslant 0$ (esto es, $(c_n) \geqslant 0$). Evidentemente,

$$c_n = \text{mínimo } (a_n, b_n) \quad \text{para cada } n,$$

luego

$$\{x \in \mathbf{N} \mid c_n \geqslant 0\} = \{x \in \mathbf{N} \mid a_n \geqslant 0\} \cap \{n \in \mathbf{N} \mid b_n \geqslant 0\},$$

esto es, $S \cap T \in \mathfrak{F}_r$.

(iii) $\phi \notin \mathfrak{F}_r$. Si $\phi \in \mathfrak{F}_r$ existiría $(a_n) \geqslant 0$ tal que $\{n \in \mathbf{N} \mid a_n \geqslant 0\} = \phi$, o sea que $a_n < 0$ para todo n, luego

$$\{x \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)}(x) < 0\} = [1,\infty) \in \mathfrak{F}^*,$$

esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)} < 0$, absurdo ya que $(a_n) \geqslant 0$.

(iv) Por (i), (ii) y (iii) sabemos que $\mathfrak{F}_r$ es un filtro de $\mathbf{N}$.

Sea $S \subseteq \mathbf{N}$, entonces $S \in \mathfrak{F}_r$, ó $\mathbf{N}-S \in \mathfrak{F}_r$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $S \notin \mathfrak{F}_r$, sea

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in S \\ 0 & \text{si } n \notin S \end{cases}$$

entonces tenemos:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)} < 0 \ ,$$

luego:

$$-f = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)\phi_{[n,n+1)} > 0 \ ,$$

esto es, $(-a_n) \geqslant 0$, así que

$$\{n \in N \mid -a_n \geqslant 0\} = \{n \in N \mid n \notin S\} = N - S \in \mathfrak{F}_r .$$

(v) $\mathfrak{F}_r$ es un filtro maximal.

Si $\mathfrak{F}_r$ no fuera maximal existiría un filtro de N, $\overline{\mathfrak{F}}$ tal que

$$\overline{\mathfrak{F}} \supsetneq \mathfrak{F}_r , \quad \overline{\mathfrak{F}} \neq \mathfrak{F}_r .$$

Sea $S \subsetneq N$ tal que $S \in \overline{\mathfrak{F}}$, $S \notin \mathfrak{F}_r$. Por (iv) se tendría que $N-S \in \mathfrak{F}_r$, luego $N-S \in \overline{\mathfrak{F}}$, esto es imposible ya que $S \in \overline{\mathfrak{F}}$.

(vi) $\mathfrak{F}_r$ es un filtro de Frechet, ya que para todo N_o el conjunto $\{n \mid n \geqslant N_o\}$ evidentemente pertenece a $\mathfrak{F}_r$.

APENDICE 4

Dado un filtro de Frechet de N, $\mathfrak{F}_r$. Sea $\tilde{\mathfrak{F}}$ la colección de todos los conjuntos casi iguales a los conjuntos del tipo:

$$\bigcup_{n \in S} [n,n+1) \quad , \quad S \in \mathfrak{F}_r .$$

Si $\mathfrak{F}^*$ es un ultrafiltro más fino que $\tilde{\mathfrak{F}}$, entonces evidentemente $\mathfrak{F}^*$ es más fino que $\mathfrak{F}$ utilizado en el parágrafo 1. Vamos a demostrar que $\mathfrak{F}_r$ es igual a la colección de todos los conjuntos de la forma:

$$\{n\in \mathbf{N} \mid a_n \geqslant 0 \quad \text{para alguna} \quad \Sigma a_n \phi_{[n,n+1)} \geqslant 0\}$$

<u>Demostración</u>: Si $S \in \mathfrak{F}_r$ entonces evidentemente se tiene que:

$$\sum_{n\in S} 1\cdot\phi_{[n,n+1)} > 0.$$

Recíprocamente, supongamos que

$$T=\{n\in \mathbf{N} \mid a_n \geqslant 0 \quad \text{donde} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \phi_{[n,n+1)} \geqslant 0\} \notin \mathfrak{F}_r$$

Si $T \notin \mathfrak{F}_r$ entonces $\mathbf{N} - T \in \mathfrak{F}_r$. Pero:

$$\mathbf{N}-T = \{n\in \mathbf{N} \mid a_n < 0 \quad \text{donde} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)} \geqslant 0\}.$$

Pero:

$$\{x\in \mathbf{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)}(x) < 0\} = \bigcup_{n\in \mathbf{N}-T} [n,n+1) \in \mathfrak{F}^*$$

o sea que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_{[n,n+1)} < 0$ (absurdo!)

APENDICE 5

En el caso (ii), $[b,t) \in \mathfrak{F}^*$, imposible ya que

$$m([b,t)) = t-b \neq \infty .$$

En el caso (iii) , $[x_n,b) \in \mathfrak{F}^*$, imposible por la misma razón anterior.

***

REFERENCIAS

[1] Kopperman,R. Model Theory and its applications, Allyn Bacon, Boston, 1972.

[2] Takeuchi, Y. Representación de los números no convencionales mediante operadores hermíticos, Rev. Col. Matemáticas Vol. X 1976.

Universidad Nacional de Colombia.
Bogotá, D.E. Colombia.

El presente artículo es el texto de una conferencia dictada en la Universidad del Valle en Octubre de 1977.