

Vol. XII (1978), págs. 1 - 15

EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA
LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

por

Julio César Díaz.

SUMARIO

Se da una motivación al método de Elementos Finitos, tomando como modelo dos tipos de ecuaciones. Se construyen varios espacios de aproximación de dimensión finita. Se exponen métodos continuos y discretos en tiempo para la solución numérica de ecuaciones de difusión.

§1 Introducción. Para comenzar consideraremos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} -(au')'(x) + b(x)u &= f(x), & x \in I = [0,1], \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde f es una función continua en I , y además a es una función continuamente diferenciable tal

que existen $\eta_1, \eta_2 > 0$ por la cual $\eta_1 > a(x) > \eta_2$ por cada $x \in I$ (uniformemente acotada, lejos de cero) y b es una función que tiene al menos una derivada continua y es no-negativa en I . Podemos asumir la existencia de una función única u que satisface (1.1), por las condiciones impuestas en a, b y f .

Antes de continuar introducimos la definición de espacios de Sobolev. Dado un intervalo $\Omega = [a, b]$ denotamos

$$L^2(\Omega) = \{h: \int_{\Omega} h^2(x) dx < \infty\},$$

y dado un entero positivo s ,

$$H^s(\Omega) = \{h \mid \frac{d^j h}{dx^j} \in L^2(\Omega), \quad j=0, 1, \dots, s\}$$

además, decimos que $h \in H_0^s(\Omega)$ si $h \in H^s(\Omega)$ y $h(a) = h(b) = 0$. Estos espacios son espacios lineales normados por las siguientes normas:

$$\|h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} h^2(x) dx,$$

y

$$\|h\|_{H^s(\Omega)}^2 = \sum_{j=0}^s \left\| \frac{d^j h}{dx^j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Se puede notar también que

$$\|h\|_{H_0^1(\Omega)} = \|h'\|_{L^2(\Omega)},$$

da una norma para $H_0^1(\Omega)$.

Regresando a la ecuación, multiplicamos a ambos lados por una función $v \in H_0^1(I)$ e integramos entre 0 y 1, integrando por partes el primer término, obtenemos

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & \int_I a(x) u'(x) v'(x) dx + \int_I b(x) u(x) v(x) dx = \\ & = \int_I f(x) v(x) dx \end{aligned} \quad (1.2)$$

Adoptemos ahora la notación $(f, h) = \int_I f(x) h(x) dx$.

(1.2) se convierte en

$$(au', v) + (bu, v) = (f, v), \quad v \in H_0^1. \quad (1.3)$$

La ecuación (1.3) es llamada la forma débil de la ecuación (1.1), es fácil observar que si u es la solución de (1.1) entonces es solución de (1.3) y se puede probar que si $u \in H_0^1(I) \cap H^2(I)$ satisface (1.3) entonces satisface (1.1). En otras palabras son equivalentes.

§ 2 Método de Elementos Finitos.

El Método de Elementos Finitos fué bautizado así por los Ingenieros quienes desarrollaron empíricamente el método y lo utilizaban sin conocimiento de sus propiedades. Independientemente los matemáticos desarrollaron y estudiaron el método bajo el nombre de Método de Galerkin. Hay otros nombres que ha recibido y aún el de personas que lo sugirieron

con anterioridad, como R. Courant, pero estos dos nombres son los más aceptados en la actualidad.

El método se basa en la ecuación (1.3). Dado un subespacio M de H_0^1 de dimensión finita, el método consiste en hallar $U \in M$ tal que

$$(aU', V') + (bU, V) = (f, V), \quad \forall V \in M. \quad (2.1)$$

Observemos que como M es un subespacio de dimensión finita existen elementos V_1, V_2, \dots, V_M tales que cada elemento $U \in M$ se puede escribir como

$$U = \sum_{i=1}^M \alpha_i V_i,$$

donde los α_i 's son escalares. Reescribiendo (2.1) y tomando $V = V_i$, $i=1, 2, \dots, M$ obtenemos

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j (aV_j', V_i') + \sum_{j=1}^M \alpha_j (bV_j, V_i) = (f, V_i), \quad i=1, 2, \dots, M.$$

Si escribimos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)^T$, podemos reescribir (2.1) como

$$(A + B) \alpha = F$$

donde $A = ((aV_j', V_i'))$, $B = ((bV_j, V_i))$ y

$$F = ((f, V_1), \dots, (f, V_M))^T, \quad \text{o sea}$$

$$A = \begin{bmatrix} (aV'_1, V'_1) & (aV'_2, V'_1) & \dots & (aV'_M, V'_1) \\ (aV'_1, V'_2) & (aV'_2, V'_2) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (aV'_1, V'_M) & \dots & \dots & (aV'_M, V'_M) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} (bV_1, V_1) & (bV_2, V_1) & \dots & (bV_M, V_1) \\ (bV_1, V_2) & (bV_2, V_2) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b(V_1, V_M)) & \dots & \dots & (bV_M, V_M) \end{bmatrix},$$

luego el Método de Elementos Finitos consiste en encontrar un vector α tal que

$$(A + B) \alpha = F. \quad (2.2)$$

Observamos que debido a que $b \geq 0$ y $a > 0$, A y B son matrices simétricas y positivas (A es positiva cuando $x^T Ax > 0$, para cada vector $x \neq 0$). Luego, $A + B$ es simétrica y positiva. Pero como cada matriz positiva tiene un inverso, existe un único vector α que satisface (2.2) de donde hay un único $U \in M$ solución de (2.1).

§ 3 Estimación de errores y subespacios de dimensión finita.

Para estimar la rata de convergencia de la aproxi-

mación U definida por (2.1) a la solución u de (1.1) es necesario conocer las propiedades de aproximación del subespacio M de dimensión finita; puesto que, el error $u-U$ puede acotarse en términos del error hecho en aproximar u con elementos de M . Ver [4],[6].

A continuación mencionamos algunos de los espacios usados en la práctica y sus propiedades de aproximación.

La primera sugerencia sería la de tomar el espacio de polinomios en I de un determinado grado r , debido al teorema de Weierstrass. Sin embargo, este espacio da una matriz llena, esto es todos los elementos son diferentes de cero, la cual es muy difícil de resolver numéricamente. Lo que buscamos son espacios cuyas bases tengan la propiedad de que las matrices A y B , generadas, tengan un gran número de elementos cero, o sea dispersas.

A pesar de lo anterior los espacios que consideremos aquí serán basados en polinomios pero tendrán una construcción un poco elaborada para garantizar la dispersidad de la matriz.

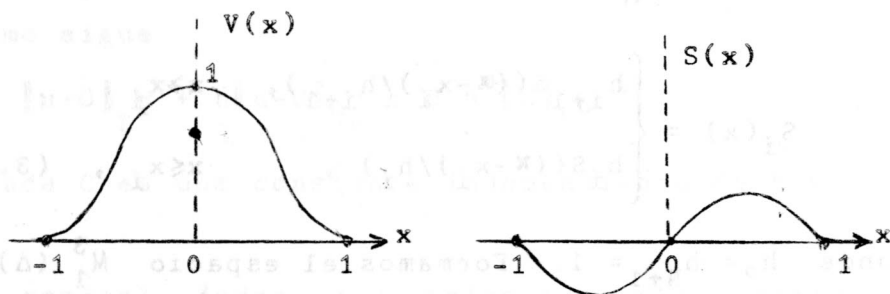
Consideremos primero el caso de polinomios cúbicos de Hermite, definimos funciones V y S como sigue:

$$V(x) = \begin{cases} 1-3x^2 + 2x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1-3x^2 - 2x^3, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

y

$$S(x) = \begin{cases} x(1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x(1+x)^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

cuyas correspondientes gráficas son:



Observamos, además, que V y S satisfacen las siguientes propiedades:

$$V(1) = V(-1) = 0, \quad V(0) = 1,$$

$$V'(1) = V'(-1) = V'(0) = 0,$$

y

$$S(1) = S(-1) = S(0) = 0,$$

$$S'(1) = S'(-1) = 0, \quad S'(0) = 1.$$

Luego son funciones continuamente diferenciables en \mathbb{R} . Ahora tomemos una partición Δ del inter

valo I,

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$$

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i=1, 2, \dots, N,$$

y

$$h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$$

Para cada $i=0, 1, \dots, N$, definimos

$$V_i(x) = \begin{cases} V((x-x_i)Ah_{i+1}), & x \geq x_i, \\ V((x-x_i)/h_i), & x \leq x_i, \end{cases} \quad (3.1)$$

y

$$S_i(x) = \begin{cases} h_{i+1} S((x-x_i)/h_{i+1}), & x \geq x_i \\ h_i S((x-x_i)/h_i), & x \leq x_i, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $h_0 = h_{N+1} = 1$. Formamos el espacio $M_1^3(\Delta)$ generado por S_0, S_1, \dots, S_N y V_1, V_2, \dots, V_{N-1} . Obsérvese que $M_1^3 \equiv M_1^3(\Delta)$ es un subespacio de dimensión finita de H_0^3 . Ahora sólo nos basta con conocer las propiedades de aproximación de M_1^3 .

Observamos que si tomamos $y \in H^4(I) \cap H_0^3$ y formamos

$$Y = \sum_{i=1}^{N-1} y(x_i) V_i(x) + \sum_{i=0}^N y'(x_i) S_i(x), \quad (3.3)$$

entonces $Y \in M_1^3$. Además $y-Y$ satisface, por el teorema del Núcleo de Peano

$$\|y-Y\|_{L^2(I)} + h\|y-Y\|_{H_0^1(I)} < C h^4 \|y\|_{H^4(I)}$$

donde C es una constante independiente de h y de la función y .

En el caso de utilizar el espacio M_1^3 para aproximar la solución de (1.1) usando el método de Galerkin, observamos que la forma de las matrices es de banda pues las funciones base no interactúan sino de a cuatro por subintervalo generando así matrices de máximo 7 elementos diferentes de cero por fila y por columna. El error o tasa de convergencia puede acotarse en términos de $O(h^4)$ como sigue

$$\|u-U\|_{L^2} + h\|u-U\|_{H_0^1} \leq C h^4 \|u\|_{H^4},$$

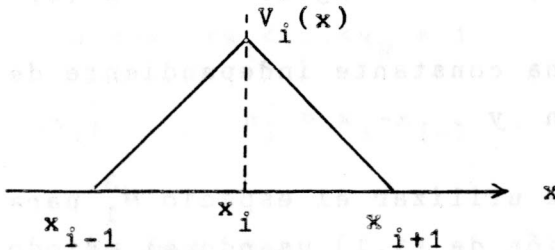
donde C es una constante independiente de h y de u .

En general, dados r, s tales que $r \geq 1$, $r \geq s \geq 0$, se puede considerar el espacio $M_S^r(\Delta)$ como el espacio de funciones que poseen s derivadas continuas y en cada subintervalo I_i de la partición Δ , son polinomios de grado r a lo más. En este caso las matrices son de banda y la tasa de convergencia de U a u es del orden de $O(h^{r+1})$.

Mencionamos por último otro caso importante, el de M_0^1 , el cual tiene una base descrita por las funciones "gorro" dadas por

$$V_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1$$

cuya gráfica esta dada por



En este caso la matriz es tridiagonal, es decir, una banda de 3 de ancho y el error del orden de $O(h^2)$.

§ 4 Ecuaciones de tipo parabólico.

En este parágrafo consideramos la ecuación de difusión dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (x,t) \in I \times (0,T], \quad (4.1a)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad (4.2b)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in I, \quad (4.1c)$$

donde $0 < T < \infty$. Asumimos que existen constantes positivas η_1 y η_2 tales que, por cada $x \in I$,

$$\eta_2 < a(x) < \eta_1$$

Ahora seguimos el mismo proceso que en §1, multiplicamos por $v \in H_0^1$ e integramos sobre I para obtener

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \left(a \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{d}{dx} v \right) = 0, \quad t > 0, \quad v \in H_0^1(I), \quad (4.2a)$$

y

$$(u(\cdot, 0), v) = (u_0, v), \quad v \in H_0^1(I). \quad (4.2b)$$

Ahora, dado un espacio M de dimensión finita, el método de Elementos Finitos consiste en hallar una función diferenciable $U(\cdot, t) \in M$, por cada t , tal que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}, v\right) + (a \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{d}{dx} v) = 0, \quad t > 0, \quad v \in M \quad (4.3a)$$

y

$$(U, v) = (u_0, v), \quad t = 0, \quad v \in M. \quad (4.3b)$$

En adelante nos referiremos a U definida por (4.3) como la aproximación de Galerkin continua en tiempo. Antes de utilizar las Ecuaciones (4.3) debe discretizarse en tiempo, esto lo haremos en el próximo párrafo.

Por ahora consideremos V_1, \dots, V_M una base de M , y asumamos que

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) V_j(x).$$

Substituyendo esta expresión de U en (4.3_a) obtenemos

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j'(t) (V_j, V_i) + \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) (a V_j', V_i') = 0$$

$$L = 1, \dots, M, \quad t > 0,$$

y de (4.3_b)

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j(0) (V_j, V_i) = (u_0, V_i), \quad i = 1, \dots, M.$$

Luego (4.3) se convierte en un problema de valor inicial del sistema de ecuaciones

$$B \alpha'(t) + A \alpha(t) = 0, \quad t > 0$$

$$B \alpha(0) = d, \quad (4.4)$$

donde A y B fueron dadas en §2 ($b \equiv 1$),
 $d = ((u_0, V_1), \dots, (u_0, V_M))^T$ y $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_M(t))^T$. Ya que las matrices A y B son positivas, se puede demostrar que (4.4) tiene una solución única.

§ 5 Elementos Finitos Discretos en Tiempo.

En general es imposible resolver (2.5) exactamente; entonces, para obtener soluciones aproximadas, discretizamos la variable t. Sea $t_m = m\Delta t$, donde $\Delta t = T/M$, $M > 0$, M entero. En Douglas-Dupont [2] se formulan y estudian varios métodos discretos en tiempo.

Uno de los métodos más precisos se obtiene utilizando la regla del trapecio para aproximar (4.4), y ésta toma la forma

$$B \frac{\alpha^{m+1} - \alpha^m}{\Delta t} + A \frac{\alpha^m + \alpha^{m+1}}{2} = 0, \quad m \geq 0, \quad (5.1)$$

$$B \alpha(0) = d$$

donde α^m es una aproximación de $\alpha(t_m)$. En forma de productos internos (5.1) toma la forma

$$\left(\frac{U_{m+1} - U_m}{\Delta t}, v \right) + \left(a \frac{U'_m + U'_{m+1}}{2}, v' \right) = 0,$$

$$\forall M, \quad m \geq 0, \quad (5.2)$$

$$(V_0, v) = (u_0, v), \quad \forall M.$$

Este método se llama el método de Crank-Nicholson-Galerkin, en [2], Douglas-Dupont mostraron que era correcto de segundo orden en tiempo. Otros autores han estudiado métodos para la ecuación (4.1), [1], [3], [5], [6], [7]

El problema de la convergencia de la aproximación U definida por (4.3) a la solución u de (4.1) se discutió en detalle en [2]. Douglas-Dupont probaron solamente que para M_1^3 .

$$\|u - U\|_{L^2(I)}(t) \leq C h^3, \quad t \in |0, T|,$$

Pero Wheeler [8] usando técnicas más sofisticadas derivó el estimativo

$$\|u - U\|_{L^2(I)}(t) \leq C h^4, \quad t \in |0, T|.$$

Sin embargo, para los métodos discretos al error de aproximación se ha de añadir el error que se produce de la discretización en tiempo. De hecho en [6], [8] se muestra que si u es suficientemente diferenciable y $M = M_1^3$, entonces

$$\|u_m - U_m\|_{L^2(I)} \leq C ((\Delta t)^2 + h^4)$$

donde $u_m = u(\cdot, t_m)$ y U_m está definida por (5.2).

REFERENCIAS

- [1] Dendy, J.E. "Penalty Galerkin Methods for Partial Differential Equations". SIAM J. Numer. Anal.
- [2] Douglas, J.Jr. Dupont, T. "Galerkin Methods for Parabolic Equations" SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970) 575-626.
- [3] - - - "Galerkin Methods for Parabolic Equations with nonlinear boundary conditions" Numer. Math. 20 (1973) 213-237.
- [4] - - - "Galerkin Approximations for the Two Point Boundary value Problem Using Continuous Piecewise-Polynomial Spaces" Numer. Math. 22 (1974) 99-104.
- [5] Dupont, T., Fairweather, G., Johnson, J.P., "Three level Galerkin Methods for Parabolic Problems" SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974).
- [6] Fairweather, G. "Galerkin Methods for Differential Equations" Second Ed. Wisk 111, Nat.

Res. Inst. Math. Sci. Pretoria, Jan 1973.

- [7] - - - "A survey of Discrete Galerkin Methods for Parabolic Equations in One Space Variable".
- [8] Wheeler, M.F., "A priori L^2 -Error Estimates for Galerkin Approximations to Parabolic Partial Differential Equations" SIAM J. Numer. Anal., 10 (1973) 723-759.

Department of Mathematics
University of Kentucky
Lexington, Ky 40506.