Boletín de Matemáticas
Vol. XI (1977), págs. 179 - 183

UNA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE SCHRÖDER - BERNSTEIN (*)

por

Germán Posada

La noción de equivalencia entre dos conjuntos es vieja en Matemáticas. Bolzano, en su obra, "Paradojas del infinito" (1851), fuê el primero en hacer notar que si se daba una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos, se debería considerar que estos dos conjuntos son equivalentes (en el sentido de que tienen el mismo "número" de elementos), y que esta noción era válida para conjuntos finitos e infinitos.

(*) Conferencia presentada por el autor en el V Coloquio Colombiano de Matemáticas; Medellín, 1975. N. del E.

Cantor, al desarrollar su teoría de conjuntos, pulió esta idea y la llevó hasta sus últimas consecuencias, construyendo una teoría de números transfinitos.

El conjeturó que si A es equivalente a un subconjunto de B (es decir, si existe una función uno a uno de A a B), y a su vez, B es equivalente a un subconjunto de A, entonces A y B son equivalentes.

Esta conjetura fué probada independientemente por E. Schröder y F. Bernstein alrededor de 1890; desde entonces se han dado muchas demostraciones. Presentaremos aquí una demostración sencilla dada por J. D. Monk, que es instructiva por el método de demostración.

<u>Teorema 1</u>. (Schröder-Bernstein). Sean A y B conjuntos tales que existen dos funciones uno a uno, $f : A \to B$ y $g : B \to A$. Entonces existe una función $p : A \to B$, que es uno a uno y sobre.

Muchas demostraciones del Teorema 1, se basan en el siguiente lema:

<u>Lema 1</u>. Sean $A, B, f, g,$ como en la hipótesis del Teorema 1; si H es un subconjunto de A tal que $H' \subset g(B)$ y $f(H)' = g^{-1}(H')$, entonces la función $p = f/H \cup g^{-1}/H'$, es decir la función $p : A \to B$, dada por

$$p(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in H \\ g^{-1}(x), & \text{si } x \in H' \end{cases},$$

es uno a uno y sobre.

(La comilla denota complemento con respecto a A o a B; por ejemplo, $f(H)' = B - f(H)$ y $H' = A - H$.

Los símbolos $f_{/H}$ y $g^{-1}{}_{/H'}$ denotan las restricciones de f y g^{-1} a H y H', respectivamente).

<u>Demostración del Lema 1</u>. El rango de p es $f(H) \cup g^{-1}(H') = f(H) \cup f(H)' = B$, de modo que f es sobre; p es uno a uno ya que es la unión de dos funciones uno a uno con dominios disyuntos y rangos disyuntos.

Podremos usar el lema para la demostración del teorema de Schröder-Bernstein si encontramos un H adecuado; esto lo haremos usando un teorema de punto fijo en retículos completos.

Recordemos que un retículo completo es un conjunto no vacío R, provisto de un orden parcial tal que cada subconjunto no vacío de R tiene supremo e ínfimo.

<u>Ejemplo 1</u>. El intervalo cerrado $[0,1]$ con el orden usual es un retículo completo.

Ejemplo 2. Si M es un conjunto, entonces $\mathcal{P}(M)$, el conjunto de los subconjuntos de M, con la inclusión ($\subseteq$), es un retículo completo.

El teorema de punto fijo es el siguiente:

Teorema 2. Sea $(R,<)$ un retículo completo. Si $f : R \to R$, es una función creciente (es decir, que para $x,y \in A$, $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$), entonces existe $\alpha \in R$, tal que $f(\alpha) = \alpha$.

Demostración del Teorema 2. Sea $P = \{x \in R \mid x \leqslant f(x)\}$, entonces $P \neq \emptyset$, ya que $\inf(R) \in P$. Sea $\alpha = \sup(P)$. Mostraremos que $f(\alpha) = \alpha$. Si $x \in P$ entonces $x \leqslant f(x)$ y $x \leqslant \alpha$. Luego $f(x) \leqslant f(\alpha)$, de modo que $x \leqslant f(\alpha)$. Entonces $f(\alpha)$ es una cota superior de P, y, por lo tanto, $\alpha \leqslant f(\alpha)$. De esto se sigue que $f(\alpha) \leqslant f(f(\alpha))$. Luego $f(\alpha) \in P$, entonces $f(\alpha) \leqslant \alpha$ y obtenemos $f(\alpha) = \alpha$.

Con base en este teorema podemos dar la

Demostración del Teorema 1. Consideremos la función $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, definida por $T(x) = g(f(x)')'$, para $x \in \mathcal{P}(A)$.

Ahora si $x,y \in \mathcal{P}(A)$, tenemos $x \subseteq y \Longrightarrow f(x) \subseteq f(x) \Longrightarrow f(x)' \supseteq f(y)' \Longrightarrow g(f(x)') \supseteq g(f(y)') \Longrightarrow g(f(x)')' \subseteq g(f(x)')' \Longrightarrow T(x) \subseteq T(y)$.

Entonces T es una función creciente: como $\mathcal{P}(A)$

es un retículo completo, el Teorema 1 nos da la existencia de un punto fijo para la función T.

Es decir, existe $H \subseteq A$, tal que

$$g(f(H)')' = H, \quad \text{o}$$

$$g(f(H)') = H', \quad \text{entonces}$$

$$H' = g(f(H)') \subseteq g(B),$$

y como g es uno a uno, obtenemos

$$f(H)' = g^{-1}(g(f(H)')) = g^{-1}(H') \quad ;$$

de acuerdo con el Lema 1, esto completa la demostración.

Departamento de Matemática
Universidad de los Andes
Bogotá.