Boletín de Matemáticas
Volumen X (1976), págs. 96 - 106

SOBRE LAS INTERPRETACIONES CIBERNETICAS DE LA TEORIA DEL APRENDIZAJE (*)

EMIL MARINESCU y V. GH. VODA

1. Introducción.

El propósito de este artículo es esclarecer algunos aspectos de la interpretación cibernética de la teoría matemática del aprendizaje.

Según una opinión común ([6], [7]) los modelos de la teoría del aprendizaje pueden considerarse como casos de sistemas aleatorios con ligazones completas (1). Como hoy en día esta teoría está completamente estudiada, el tratamiento unitario de los modelos estocásticos del aprendizaje se encuentra totalmente realizado.

Según la opinión de Iosifescu [8] la teoría de Bush y Mosteller [1] está ya finiquitada, haciendo abstracción, claro está, de la extensión de ciertos resultados o de la complicación de ciertos modelos particulares.

Ciertamente queda aún una serie de vías abiertas, por ejemplo, aquella que aborda esta teoría desde el punto de vista de los juegos ([11], [12]), la elaboración de modelos informacionales ([3], [9]), los sistemas de auto-aprendizaje, el problema del reconocimiento ("recognition problem"), los sistemas cibernéti -

(*) Traducción de V.S.Albis G. Este trabajo fue publicado anteriormente en los Anais da Faculdade de Ciencias do Porto, 1971.

(1) Las cuales generalizan las cadenas de Ocinescu-Mihoc.

cos.

2. Algunos comentarios sobre el proceso de aprendizaje.

El aprendizaje, en cuanto fenómeno, es considerado por Pieron [8] como la modificación adaptativa del comportamiento de un organismo - viviente o abstracto- en el transcurso de experiencias repetidas.

La teoría matemática del aprendizaje comprende la totalidad de los métodos y resultados ligados a la representación matemática de los fenómenos del aprendizaje.

Ella puede considerarse como una "disciplina de frontera" que ha resultado de la intersección de la sicología con las matemáticas.

En la modelación matemática del fenómeno del aprendizaje se pueden distinguir (según la naturaleza de las hipótesis) dos tipos de modelos : los modelos determinísticos y los estocásticos.

Por modelo se entiende un conjunto de axiomas, expresados matemáticamente, que ponen en evidencia la teoría sicológica, en el caso de una situación experimental dada.

Es necesario precisar que por teoría sicológica se entiende la totalidad de conceptos y las relaciones entre ellos que tiene que ver con toda una clase entera de situaciones, y no con una situación experimental particular.

Es evidente que la formalización matemática del fenómeno confiere a la situación experimental un carácter más restrictivo que la respectiva teoría sicológica, hecho que permite un análisis más profundo del fenómeno.

Las situaciones experimentales constan de una sucesión de pruebas.

El sujeto se somete, en cada una de estas pruebas, a la acción de un subconjunto de estímulos que hacen parte de un conjunto de estímulos cuyas características son estudiadas por el que efectúa la experiencia.

En seguida, el sujeto, de entre un conjunto de alternativas, escoge una respuesta que representa uno de los comportamientos posibles.

A cada respuesta sigue un resultado que, en el caso de experiencias de "aprendizaje simple" (es decir, experiencias para las cuales el subconjunto de estímulos es idéntico de una prueba a otra), se imagina sea como recompensa sea como castigo.

Según Estes [2], la situación del aprendizaje comprende tres tipos de elementos : las respuestas, los estímulos y los sucesos de refuerzo.

La estimulación se representa por un cierto conjunto de estímulos, notado generalmente con $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ ó $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, de donde el sujeto elige las muestras al comienzo de cada experiencia.

El sujeto no sabría desde un comienzo escoger la respuesta necesaria y, después de cada experiencia, da con una cierta probabilidad una respuesta del conjunto de respuestas posibles.

Los resultados posibles de una experiencia se clasifican según sus efectos sobre las probabilidades de las respuestas y se representan con el conjunto :

$$\epsilon = \{ E_o, E_1, \ldots, E_r \},$$

en donde E_i, $i \neq 0$, representa el suceso : "la respuesta A_i está reforzada" y E_o representa el suceso : "ninguna respuesta está reforzada".

El aprendizaje está definido en términos del cambio, de una experiencia a otra, de la probabilidad de las respuestas, y las leyes del aprendizaje toman la forma específica de estos cambios en las diferentes situaciones experimentales dadas.

3. El modelo Iosifescu-Norman. El modelado informacional.

Para esclarecer la idea de la sección precedente, se mostrará sucintamente en qué consiste lo esencial del modelado estocástico del fenómeno del aprendizaje en la concepción de Iosifescu-Norman [10].

La formalización que sigue se debe a Norman quien ha usado una obra clásica de Iosifescu (1963).

Según estos autores, un "experimento" de aprendizaje puede modelarse de la manera siguiente : un sujeto se somete varias veces a una cierta experiencia, experiencia en la cual el sujeto puede dar respuestas diferentes.

Cada exposición a la situación experimental puede influenciar de una manera o de otra la tendencia en las respuestas del sujeto. Se supone que esta tendencia en la prueba n-ésima está esencialmente determinada por el estado S_n del sujeto.

El conjunto de estados del sujeto se llama S. El efecto de la n-ésima prueba está representada por la aparición de un suceso denotado con E_n ; el conjunto de todos los sucesos posibles se denota con E. Tanto S_n como E_n se consideran variables aleatorias. A cada elemento "e" de E corresponde una función u_e definida en S y con valores en S.

La transición de la prueba n-ésica a la $(n+1)$-ésima está dada por la ley $S_{n+1} = u_{E_n}(S_n)$. Se supone que la repartición de E_n depende sólo del estado del sujeto y se denotará con $P(S_n, .)$.

Entonces el sistema $\{S, E, (u_e)_{e \in E}, P(s, .)_{s \in S}\}$ se llamará un "modelo estocástico del aprendizaje" y sería fácil verificar que representa un sistema aleatorio con ligazones completas.

Los modelos informacionales ([3], [9]) consistían en que el proceso de aprendizaje se tomaba junto con el organismo y aquel que hacía la experiencia y participaba en el proceso, constituía un sistema del tipo retro-alimentativo ("feed-back").

El examen de este proceso se hace mediante la entropía, el concepto fundamental de la teoría de la información.

Se considera un sujeto colocado en ciertas condiciones estables, invariantes

invariantes en el tiempo y que ensaya dar respuestas útiles en una serie de experiencias sucesivas.

Sean $\mathcal{A}$ el conjunto de las respuestas posibles y $\mathcal{O}$ el conjunto de los resultados, ambos supuestos finitos pero de cardinal diferente.

Sean $p_o(A)$ la probabilidad de la respuesta $A \in \mathcal{A}$ en el momento inicial de la experiencia, y $P_n(O \mid A)$ la probabilidad de que el resultado $O \in \mathcal{O}$ aparezca en la n-ésima experiencia cuando el sujeto ha escogido $A \in \mathcal{A}$ como la respuesta a esta experiencia.

Denotemos con $p_{n+1}(\tilde{A} \mid (A, O))$ la probabilidad de la respuesta $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ después de haber efectuado la experiencia n-ésima, condicionada por la pareja (A,D).

Evidentemente :

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} p_o(A) = 1$$

y

$$\sum_{O \in \mathcal{O}} P_n(O \mid A) = 1 \;, \qquad \sum_{\tilde{A} \in \mathcal{A}} p_{n+1}(\tilde{A} \mid (A, O)) = 1$$

para cada $n \geq 1,\ A \in \mathcal{A}\ ,\ O \in \mathcal{O}$.

El proceso de aprendizaje discurre de tal suerte que, en el momento inicial , las respuestas son todas equiprobables.

Después de efectuar una experiencia, el sujeto escoje una respuesta $A \in \mathcal{A}$, de probabilidad $p_o(A)$, la cual es seguida por el resultado $O \in \mathcal{O}$ con una cierta probabilidad $p_1(O \mid A)$. La pareja (A,O) modifica las probabilidades de las respuestas ulteriores.

El conjunto formado por el sujeto y el experimentador se denomina un "sistema de instrucción".

El resultado interesante que se obtiene de esta construcción es que, dado un sistema de instrucción, el proceso de aprendizaje se reduce a una cadena de Markov sobre el conjunto de respuestas posibles (Guiasu, [3]).

4. Interpretación cibernética.

Desde el punto de vista cibernético, puédese considerar el aprendizaje como un proceso informativo.

El experimentador transmite al sujeto, a lo largo de experiencias repetidas, una cierta cantidad de información sobre las respuestas que este último debe escoger de entre un conjunto dado de respuestas.

Es necesario subrayar aquí que, desde el punto de vista cibernético, deben tenerse en cuenta los llamados "sistemas de aprendizaje controlados por el experimentador" puesto que ellos pueden considerarse capaces de modelar "el proceso de instrucción" en el sentido que el experimentador es un profesor y el sujeto un alumno.

Antes de detallar estas cosas, es necesario dar algunas definiciones que nos serán indispensables.

Introduzcamos en el conjunto $B_2 = \{0,1\}$ dos leyes de composición interna llamadas "reunión" y "multiplicación" - representados por "U" y ".", respectivamente- y una aplicación involutiva de B_2 en sí mismo -denotada con $x \to \bar{x}$, y definidas así :

U	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

x	0	1
$\bar{x}$	1	0

Así provisto, llamaremos al conjunto B_2 un "álgebra booleana de dos elementos". Llamaremos, "álgebra booleana" por otra parte y en general, a un conjunto $\boldsymbol{B}$, finito o no, provisto de tres operaciones : reunión, multiplicación y negación que satisfacen las siguientes condiciones (no todas independientes) :

Para todos los x,y,z, elementos de B, se tiene :

1) $x \cup y = y \cup x$ 2) $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$

3) $xy = yx$ (1) 4) $x(yz) = (xy)z$

5) $x \cup xy = x$ 6) $x(x \cup y) = x$

7) $x \cup yz = (x \cup y)(x \cup z)$ 8) $x(y \cup z) = xy \cup xz$

9) $x \cup 1 = 1$ 10) $x0 = 0$

11) $x \cup \bar{x} = 1$ 12) $x\bar{x} = 0.$

Introduzcamos además de las tres leyes de composición precedentes, una tercera llamada "diferencia simétrica" ó "suma módulo 2" - representada por $\oplus$ y definida por

$$x \oplus y = x\bar{y} \cup \bar{x}y .$$

Es fácil ver que se verifican las siguientes relaciones :

$$\begin{aligned}
0 \oplus 0 &= 0 \\
0 \oplus 1 &= 1 \oplus 0 = 1 \\
1 \oplus 1 &= 0 \\
x \oplus y &= y \oplus x \\
(x \oplus y) \oplus z &= x \oplus (y \oplus z) \\
x \oplus 0 &= x \\
x \oplus 1 &= \bar{x} \\
x \oplus x &= 0 \\
x(y \oplus z) &= xy \oplus xz .
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que el sistema de aprendizaje con la ayuda del experimentador, conduce a la situación siguiente : en un momento dado t, aquél actúa sobre el sujeto con el estímulo $s_k^{(t)}$; al recibir este estímulo, el sujeto escoge, de un cierto conjunto de respuestas, la alternativa $A_k^{(t)}$.

---

(1) En lo que sigue, en vez de $x.y$, $(x \cup y).z$, etc., escribiremos sencillamente : xy, $(x \cup y)z$, etc..

Imaginaremos la respuesta $A_k^{(t)}$ como la n-pla :

$$X_k^{(t)} = < x_{k_1}^{(t)} , x_{k_2}^{(t)} , \ldots , x_{k_n}^{(t)} >$$

en donde $x_{k_j}^{(t)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, son elementos de un álgebra booleana $B_2 = \{0,1\}$ de dos elementos.

En el conjunto de respuestas que tiene a su disposición, el sujeto encuentra la mejor respuesta para el estado (t), digamos

$$\tilde{X}_k^{(t)} = < y_{k_1}^{(t)} , y_{k_2}^{(t)} , \ldots , y_{k_n}^{(t)} > ,$$

en donde $y_{k_j}^{(t)}$, $j = 1,2, \ldots, n$, son elementos de un álgebra booleana $B_2 = \{0,1\}$.

Consideremos ahora las "funciones respuestas" ; las n-plas $A_k^{(t)} = < u_{k_1}^{(t)} , u_{k_2}^{(t)} , \ldots , u_{k_n}^{(t)} >$ asociadas con cada respuesta $X_k^{(t)}$ en donde $u_{k_j}^{(t)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, son variables enteras que toman los valores $\{0,1\}$ según las reglas siguientes :

$$u_{k_j}^{(t)} = 0 <=> x_{k_j}^{(t)} = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (\beta)$$

$$u_{k_j}^{(t)} = 1 <=> x_{k_j}^{(t)} = 0 , \qquad j = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Sea $\tilde{A}_k^{(t)} = < v_{k_1}^{(t)} , v_{k_2}^{(t)} , \ldots , v_{k_n}^{(t)} >$ la función respuesta asociada a la mejor respuesta $\tilde{X}_k^{(t)}$.

Resulta claramente que si, para cada estímulo y sin importar el estado t, el sujeto escoge la respuesta correcta asociada al estado t, puede decirse que el sujeto es "perfecto" y el modelo se vuelve interesante.

Podemos definir para las variables $u_{k_j}^{(t)}$ y $v_{k_j}^{(t)}$ la operación :

$$u_{k_j}^{(t)} \oplus v_{k_j}^{(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_{k_j}^{(t)} \oplus y_{k_j}^{(t)} = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x_{k_j}^{(t)} \oplus y_{k_j}^{(t)} = 1 \end{cases}$$

en donde $x_{k_j}^{(t)}$ é $y_{k_j}^{(t)}$ son los elementos de B_2 que asociamos con $u_{k_j}^{(t)}$ y $v_{k_j}^{(t)}$.

Introduzcamos la expresión siguiente :

$$\rho_k^{(t)} = \sum_{i=1}^{n} (u_{k_i}^{(t)} \oplus v_{k_i}^{(t)}) .$$

Esta expresión puede interpretarse como la "distancia" entre la respuesta correcta y una respuesta cualquiera en un mismo estado t.

La respuesta correcta asociada con el estado t puede considerarse como la "meta" del proceso de aprendizaje para el estado respectivo.

El problema que se plantea al sujeto es el de acortar lo más posible la "distancia" entre la respuesta correcta y la respuesta que el escoge por sí mismo.

El problema es pues el siguiente :

encontrar $\text{mín}\ \rho_k^{(t)} = \text{mín} \sum_{j=1}^{n} (u_{k_j}^{(t)} \oplus v_{k_j}^{(t)})$, bajo la condición $\rho_k^{(t)} \leq \alpha$, es decir, en tal forma que las distancias entre las respuestas escogidas y la correcta no pasen de un número dado. Evidentemente $\alpha > 0$, pues si $\alpha = 0$, entonces $\rho_k^{(t)} = 0$ y se cae en el caso del "sujeto perfecto".

Resulta claramente que hemos definido las "distancias" entre respuestas como funciones seudo-booleanas, es decir, sobre el producto cartesiano $B_2 \times B_2 \times \ldots \times B_2$ y de valores enteros (véase [5]).

En esta situación el problema de programación enunciado antes, se reduce a un problema de programación seudo-booleana.

El problema general de la programación seudo-booleana se enuncia de la manera siguiente :

Determinar $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in B_2^m$ que cumpla las relaciones seudo-booleanas

$$f_i(u_1, u_2, \ldots, u_m) R_i \, 0 \quad \Big| \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \Big|$$

en donde las u_j son las variables enteras asociadas con los elementos x_j del álgebra B_2 según (β) y $R_i = \{ =, \leq, \geq, <, > \}$, y que minimiza una función seudo-booleana dada : $f_o(u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

La solución de este problema la han dado Hammer e Ivanescu y se encuentra en [4] o en [5] .

Hemos, pues, reducido el problema de la teoría del aprendizaje a un problema de programación seudo-booleana.

Referencias

[1] R. R. Bush and Fr. Mosteller - *Stochastic models for learning, New York, Wiley, 1955.*

[2] W. K. Estes - *Learning theory, <<Ann. rev. psychol.>>, 1962, 13.*

[3] Silviu Guiasu - *Modelul information al teorieiinvatarii, Studii si cercetari matematice, 1968, 4.*

[4] P. L. Hammer-Ivanescu and Sergiu Rudeanu - *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas, Berlin, Heidelberg - New York : Springer, 1968.*

[5] P. L. Ivanescu - *Pseudo-Boolean Methods for Bivalent Programming. Lecture Notes in Mathematics No. 23. Berlin -Heidelberg- New York - Springer, 1966*

[6] M. Iosifescu and R. Theodorescu - *Random Systems and Learning, Berlin Heidelberg, New York, Springer, 1968.*

[7] M. Iosifescu - *Sluciainiie sistemi s proizvolnim mnojestvom sostoianii. Rev. Roum. Math. pures et appl., 1963, 8.*

[8] M. Iosifescu, P. Tautu, R. Theodorescu - *Consideratii asupra teoriei matematice a invatarii. Revista de Psihologie, 1967, 2.*

[9] Mariana Belis - *Informationstheorietisches Lermmodell. Kybernetik, 3, 1967.*

[10] M. F. Norman - *Some convergence theorems for stochastic learning models with distance diminishing operators. Journal of Math. Psychol., 1968, 5*

[11] P. Suppes and R. C. Atkinson - *Markov learning models for multiperson interactions, Stanford, Stanford Univ. Press, 1960.*

[12] V. Gh. Voda - *On a learning model, Rev. Roum Math. pures et appl., 1969, 8.*