Boletín de Matemáticas
Vol.IX, Nos. 4,5,6, págs. 203-216

SUPERFICIES ORIENTABLES

JOSE DARIO SANCHEZ H.

Introducción A diario escuchamos frases como ésta : " Aquel individuo está o no está bien orientado en la vida ". Comprendemos perfectamente el significado de tal afirmación y no nos detenemos a meditar sobre ella. Si le preguntásemos a cualquier persona : "¿Qué significa estar orientado ?", esperamos que nos responda : " significa que el individuo tiene metas o direcciones bien determinadas en la vida "

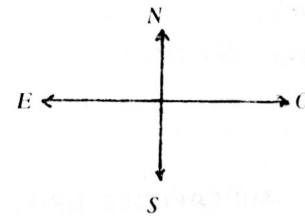
Pues bien, esta idea intuitiva envuelve un hecho exacto y la matemática ha adoptado este vocablo; nuestro objeto en este trabajo es precisar su significado en matemáticas, especialmente en geometría.

En una recta es común dar una orientación, definiendo en ella una dirección.

Definiendo en la recta un sistema de coordenadas obtenemos una representación geométrica de los números reales $(\mathbb{R})$, teniéndose así que la recta se convertirá en un espacio vectorial, permitiéndonos afirmar que : " Dar una orientación en la recta equivale a fijar en ella un vector ".

En el plano el concepto se complica ligeramente, pero él se puede orientar de diferentes formas. Una por ejemplo es la dada por los puntos cardinales : oriente, occidente, norte, sur, permitiendo orientar el plano para trabajos geográficos.

En geometría plana se habla de cuadrantes : superior derecho, superior izquierdo, inferior derecho, inferior izquierdo, estableciéndose así una orientación muy común del plano.



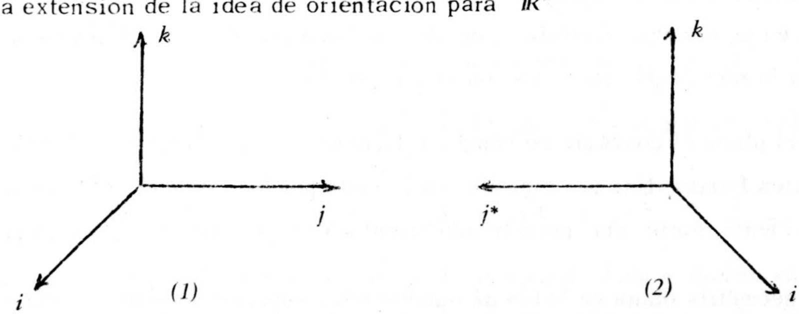
Otra manera de orientar un plano es la dada al definir en él un sistema de coordenadas polares, considerando los ángulos positivos cuando su lado terminal se desplaza contrariamente al movimiento de las manecillas del reloj.

Este último método de orientación de un plano nos permite, intuitivamente, percibir dos maneras diferentes de orientar el plano.

Notemos que un plano puede ser considerado como el producto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, o sea, un espacio vectorial, y por lo tanto, sin más detalles, podemos definir orientaciones en $\mathbb{R}^2$.

Las anteriores consideraciones nos permiten afirmar que, definiendo en el plano un sistema de coordenadas, éste se convierte en el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y para darle una orientación hay que fijar en él dos vectores linealmente independientes colocados ordenadamente; o sea, hay que distinguir en $\mathbb{R}^2$ lo que se llama "una base ordenada".

En $\mathbb{R}^3$, los físicos, con sus leyes de las manos derecha e izquierda, nos brindan una extensión de la idea de orientación para $\mathbb{R}^3$



Siendo $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$, $j^* = (0, -1, 0)$. La ley de la mano derecha (1) establece una orientación en $\mathbb{R}^3$ y el conjunto $\{i, j, k\}$ es una base en $\mathbb{R}^3$, observándose que

$$det\,[\,i, j, k\,] = 1 > 0$$

La ley de la mano izquierda (2) brinda una orientación distinta a la anterior y el conjunto $\{i, j^*, k\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$det\,[\,i, j^*, k\,] = -1 < 0$$

Notemos que si tomáramos $\{j, i, k\}$, en ese orden, como base de $\mathbb{R}^3$, vamos a obtener en $\mathbb{R}^3$ un resultado análogo al dado por el caso (2) de la ley de la mano izquierda, pues

$$det\,[\,(0, 1, 0)\,,\,(1, 0, 0)\,,\,(0, 0, 1)\,] = -1 < 0$$

Consideremos la matriz del cambio de coordenadas. Si

$$(\,R^3\,,\,\{i, j^*, k\}\,) \xrightarrow{id} (\,\mathbb{R}^3\,,\,\{j, i, k\}\,)$$

es la aplicación idéntica, la matriz asociada a tal aplicación es :

$$[\,id\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

la cual es precisamente la matriz del cambio.

Vemos aquí que las dos bases definen en $\mathbb{R}^3$ la misma orientación, digamos que la orientación negativa, y que su matriz de cambio de base es tal que

$$det\,(\,[\,id\,]\,) = 1 > 0\,,$$

o sea, que el determinante de la matriz de paso asociada es positivo.

Como consecuencia de todo esto podemos decir que : " Dar una orientación en $\mathbb{R}^3$ es equivalente a dar una base ordenada " y, también, afirmar que la orientación de un espacio vectorial está íntimamente ligada a las matrices de los cambios de bases.

Extenderemos ahora estas nociones intuitivas dando una definición exacta de orientación para un espacio vectorial y, siguiendo este orden de ideas, y suponiendo la noción de superficie, extenderemos la idea de orientación a ciertas superficies. Este será el objeto de los siguientes parágrafos.

§ 1. Espacio vectorial orientado

Definición 1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el cuerpo de los números reales R. Sean

$$U = \{ u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \} \quad , \quad W = \{ w_1, w_2, w_3, \dots, w_n \}$$

bases de V. Entonces

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \; .$$

Diremos que U y W son equivalentes cuando

$$det\,(\alpha_{ij}) > 0$$

y notamos $U \sim W$ a esta relación. Diremos también que U y W son equivalentemente orientables o equiorientables.

Veamos que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las bases del R-espacio vectorial V.

R.1. Sea U una base cualquiera de V. Entonces

$$U \sim U \; ,$$

pues

$$u_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} u_i \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

y

$$det\,(\delta_{ij}) = 1 > 0 \qquad (\, \delta_{ij} \text{ es el delta de Kronocker }) \, .$$

R.2. Si $U \sim W$ entonces

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

con $det(a_{ij}) > 0$; esto equivale a decir que la matriz (a_{ij}) es no-singular. Podemos proceder vectorialmente y escribir :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Sea $(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$. Entonces

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} w_i \quad , \qquad j = 1, 2, \ldots , n .$$

Ahora, $(a_{ij}) (b_{ij}) = I = (\delta_{ij})$; por lo tanto,

$$det \left[(a_{ij}) (b_{ij}) \right] = det(a_{ij}) \, det \, (b_{ij}) = det \, (\delta_{ij}) = 1 .$$

y así, $det \, (b_{ij}) = \left[\, det \, (a_{ij}) \, \right]^{-1} > 0$.

Esto significa que $W \sim U$, de lo cual la simetría de la relación $\sim$.

$R.3.$ Sean U, W, Z tres bases del R-espacio V tales que $U \sim W$ y $W \sim Z$. Esto significa que

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_j \qquad \text{y} \qquad z_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} w_k , \qquad j = 1, 2, \ldots , n ,$$

con $det(a_{ij}) > 0$ y $det(b_{ij}) > 0$. Reemplazando w_k tenemos entonces que

$$z_j = (\sum_{k=1}^{n} b_{ik})(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} u_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} b_{jk} a_{ki}) u_i , \quad j = 1, 2, \ldots, n .$$

Así obtenemos la matriz

$$(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} a_{ki}) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad j = 1, 2, \ldots, n .$$

Ahora,

$$det(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} a_{ki}) = det [(b_{ij})(a_{ij})] = det(b_{ij}) . det(a_{ij}) > 0 .$$

Por lo tanto $U \sim Z$, lo que muestra la transitividad de la relación $\sim$.

Podemos entonces preguntarnos : Qué acontece cuando

$$det (a_{ij}) < 0 \quad ?$$

La respuesta es que U y W están en clases distintas. Esto indica que esta relación divide al conjunto de las bases ordenadas de V en dos clases de equi-valencia llamadas : orientación positiva de V y orientación negativa de V. Cada una de esas clases es llamada una *orientación* en V .

Definición 2. Un espacio vectorial orientado es una pareja (V, θ) formada de un R-espacio vectorial y una orientación.

Una base $U = \{ u_1, u_2, \ldots, u_n \}$ de R^n se dice " una base positiva " cuando

$$det [u_1, u_2, \ldots, u_n] > 0 ;$$

R^n con una tal base se dice positivamente orientado.

Definición 3. Sean E , E^1 espacios vectoriales y (E, θ), (E^1, θ^1) **orientaciones** en E y E^1 respectivamente. Se dice **que una transformación lineal**

$$T : (E , \theta) \to (E^1 , \theta^1)$$

preserva orientación si, y solamente si,

$$\{ u_1, u_2, \ldots, u_n \} \in \theta \Longrightarrow \{ T u_1, T u_2, \ldots, T u_n \} \in \theta^1$$

En este caso (usaremos la notación $T > 0$) y diremos que E y E^1 son *orientadamente compatibles*. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ordenada de E, $\overline{\{u_1, \ldots, u_n\}}$ denotará la orientación inducida por $u_1, \ldots, u_n$

Ejemplo : Sean $(R^2, \{i, j\})$, R^2 con la base canónica y $(R^2, \{(-2, 4), (4, 2)\})$ R^2 con otra base.

Tomemos

$$T : (R^2, \{i, j\}) \to (R^2, \{(-2, 4), (4, 2)\})$$

$$(x, y) \to (x - y, x + 2y)$$

Para hallar la base asociada a T tenemos

$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\alpha + 4\beta\\4\alpha + 2\beta\end{pmatrix}$. Entonces $\alpha = 1/10$ $\beta = 3/10$

$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\alpha_1 + 4\beta_1\\4\alpha_1 + 2\beta_1\end{pmatrix}$. Entonces $\alpha_1 = 1/2$ $\beta_1 = 0$

Por lo tanto,

$$[T] = \begin{bmatrix}1/10 & 1/2\\3/10 & 0\end{bmatrix}$$

Afirmación, $T > 0$. En efecto, si tomamos $\{(4, 2), (0, 4)\} \in \overline{\{i, j\}}$, entonces

$$\{T(4, 2), T(0, 4)\} \in \{(-2, 4), (4, 2)\}$$

pues

$$T\begin{bmatrix}4 & 0\\2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{10} & \frac{1}{2}\\\frac{3}{10} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{5} & 2\\\frac{6}{5} & 0\end{bmatrix}$$

Ahora,

$$\det\left(T\begin{bmatrix}4 & 0\\2 & 4\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}7/5 & 2\\6/5 & 0\end{bmatrix} = -\frac{12}{5} < 0$$

y esto mismo se cumple para cualquier base que esté en $\overline{\{i, j\}}$. Por lo tanto,

$T > 0$. Es evidente que

$$\{ (-2\ ,\ 4)\ ,\ (4\ ,\ 2) \} \qquad \text{y} \qquad \{ (\tfrac{7}{5}\ ,\ \tfrac{6}{5})\ ,\ (2,\ 0) \}$$

están en la misma clase de orientación .

§ 2 . Atlas para una superficie.

Definición 1. Sea $S \subseteq R^3$. Si para cada punto $p \in S$ existen una vecindad V de p en R^3 , un abierto $U_o \subseteq R^2$ y una aplicación

$$\varphi : U_o \rightarrow U = V \cap S$$

tales que

1. φ es diferenciable de clase C^k , $k \geq 1$
2. φ es homeomorfismo
3. φ es de rango dos. Esto es,

$$(D_1 \varphi)_p \wedge (D_2 \varphi)_p \neq 0$$

donde $(D_i\, \varphi)_p$ indican las derivadas parciales calculadas en $\varphi^{-1}(p)$. diremos que S es una superficie regular de clase C^k. Cuando $k = \infty$, diremos simplemente que S es una superficie regular.

Definición 2. Sea $S \subseteq R^3$ una superficie regular. La pareja (U_o , φ) de la definición anterior es llamada *una parametrización* de S en p . La pareja (U , φ) (y también la tripla (U_o , φ , U)) se denomina una carta local de S en p . Es de notar que en estas condiciones S debe estar dotada de la topología de subespacio.

El siguiente resultado nos brinda una fuente interminable de ejemplos de superficies regulares. Además, permite que en los libros de cálculo se diga, sin muchos comentarios :

" Sea $z = f(x , y)$ una superficie de R^3 " .

Teorema 1. *Si $f: U \to R$ es una función diferenciable en un abierto U de R^2, entonces el gráfico de f, esto es, el subconjunto de R^3 dado por $(x, y, f(x, y))$, es una superficie regular.*

Ejemplo : Sean $S = \{(x, y, z) \in R^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,

$p = (0, 0, 1) \in S$, $U_o = \{(x, y) \in R^2 ; x \in (-1, 1)\}$, $\varphi : U_o \to S$

dada por $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, y $\varphi(U_o) = U = \{(x, y, z) ; z = 1 - x^2 - y^2\}$. Entonces, (U_o, φ) es una parametrización de S en p, (U, φ) una carta local de S en p, y S una superficie.

Sea $S \subseteq R^3$ una superficie regular $p \in S$, (U_o, φ) una parametrización de S en p. Entonces $(D_1 \varphi)_p$ y $(D_2 \varphi)_p$ son dos vectores linealmente independientes de R^3. El espacio vectorial

$$T_p S = [(D_1 \varphi)_p, (D_2 \varphi)_p]$$

engendrado por estos dos vectores es llamado el *espacio tangente a S en p*. La variedad afín, $p + T_p S$ es llamada el plano tangente a S en p.

El siguiente resultado, conocido como teorema de cambio de coordenadas, es muy importante, y prácticamente permite que la definición de superficie regular sea consistente.

Teorema 2. *Sea p un punto de una superficie regular S y sean $f: U_o \subseteq R^2 \to U = V \cap S$, $g: W_o \to W = \tilde{V} \cap S$ (V, y, $\tilde{V}$ vecindades de p en R^3) parametrizaciones de S en p (claramente $U \cap W \neq \emptyset$, pues $p \in U \cap W$). Entonces, el " cambio de coordenadas "*

$$h = f^{-1} \circ g : g^{-1}(U \cap W) \to f^{-1}(U \cap W)$$

es un homeomorfismo diferenciable y

$$d h_p = (f^{-1} \circ g)'_q$$

es un isomorfismo para todo $\bar{q} \in g^{-1}(U \cap W)$ y $q = g(\bar{q})$.

Definición 3. Sea S una superficie regular, $\{ U_i / U_i \subseteq S \}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de S,

$$\{ \varphi_i / \varphi_i : U_{oi} \to U_i \}_{i \in I}$$

una familia de aplicaciones de abiertos U_{oi} de R^2 en S. Decimos que $\{ (U_i, \varphi_i) \}_{i \in I}$ es un Atlas para S cuando :

1. (U_i, φ_i) es una carta local de S, para cada $i \in I$
2. Se cumple el teorema de cambio de cartas.
3. $\bigcup_{i \in I} U_i = S$.

§ **3. Orientación en una superficie.**

Definición 1. Sean $p \in S$ un punto de una superficie regular S y T_pS el espacio tangente a S en p. Se dice que en $p \in S$ se tiene definida una *orientación* cuando dadas dos parametrizaciones

$$\varphi : U_o \to U \subseteq S, \qquad \psi : V_o \to V \subseteq S$$

de S en p, para las que se tiene $T_pS = [\varphi_u, \varphi_v] = [\psi_u, \psi_v]$

(donde $\varphi_u = (D_1 \varphi)_p$, $\varphi_u (D_2 \varphi)_p$),

entonces

$$det (J (\psi^{-1} \circ \varphi)_p) > 0 ,$$

donde $J(\psi^{-1} \circ \varphi)_p$ es el jacobiano calculado en el punto $\varphi^{-1}(p)$.

Es de observar que esta definición es equivalente a afirmar que la aplicación

$$\varphi^{\bullet}(p_o) : R^2 \to (T_pS, \theta) > 0, \quad \theta = \{ \overline{\psi_u, \psi_v} \},$$

preserva la orientación (aquí, R^2 está orientado por su base canónica, y $p_o = \varphi^{-1}(p)$).

Definición 2. Sea S una superficie regular y

$$\varphi : U_0 \to U \subseteq S, \qquad \psi : V_0 \to V \subseteq S$$

dos parametrizaciones de S tales que $U \cap V \neq \phi$. Se dice que las cartas (U, φ) y (V, ψ) son *orientadamente compatibles* cuando,

$$\forall\, p \in U \cap V \quad , \quad det\,(J\,(\varphi^{-1} \circ \psi)\,p) > 0 .$$

Esto es, cuando todos los puntos de $V \cap U$ tienen la misma orientación.

Definición 3. Sea $\alpha = \{(U_i , \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas para una superficie S. Se dice que α es un atlas *compatible*, cuando dadas dos cartas locales cualesquiera de α con intersección no vacía, ellas son *orientadamente compatibles*.

Se dirá que dos Atlas de una superficie son compatibles si y solamente si la reunión de los dos es un *Atlas compatible*.

Definición 4. Una superficie regular S es *orientable* sí y solamente si posee un *Atlas compatible*.

Ejemplo : La esfera es una superficie regular orientable. Pues $\{(U_i , \varphi_i) \,/\, i = 1, 2\}$ donde

$$\varphi_1^{-1} : U_1 = S^2 - P(N) \to R^2 \quad (P(N) = (0, 0, 1))$$

$$(x, y, z) = p \to \varphi_1^{-1}(p) = \left(\frac{x}{1-z} , \frac{y}{1-z}\right)$$

$$\varphi_2^{-1} : U_2 = S^2 - P(S) \to R^2 \quad (P(S) = (0 , 0 , -1))$$

$$(x, y, z) = p \to \varphi_2^{-1}(p) = \left(\frac{x}{z-1} , \frac{y}{z-1}\right)$$

es un *Atlas compatible* para S^2, como es fácil de verificar.

§ **4. Aplicación.** Sean S una superficie regular conexa, $\mathcal{C}$ el conjunto de las orientaciones de S. Entonces, el cardinal de $\mathcal{C}$ es 0 (cero) ó es 2 (dos).

Demostración. Si S no es orientable, entonces $\mathcal{C} = \phi$, en cuyo caso el cardinal de $\mathcal{C}$ es cero. Supongamos, por lo tanto, que S es orientable. Así $\mathcal{C} \neq \phi$, y existe $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{C}$.

1. Sea $\mathcal{P}_1 = \{ (V, \varphi) \}$ un atlas compatible para $\mathcal{O}_1$. Entonces, para cada punto $p \in S$ existe $(U, \varphi) \in \mathcal{P}_1$ tal que

$$\varphi(p_1) = p \qquad \text{y} \qquad \varphi'(p_1) : R^2 \to (T_p S , \mathcal{O}_1) > 0$$

2. **Para cada carta** $(V_o, \varphi, V) \in \mathcal{P}_1$, definamos una nueva carta (V_o^*, ψ, V) , **en la siguiente forma :** Consideremos

$$V_o^* = \{ (v, u) \,/\, (u, v) \in V_o \}$$

y sea

$$\begin{aligned} s : V_o^* &\to V_o \\ (v, u) &\to (u, v) . \end{aligned}$$

Que s es un difeomorfismo es fácil de demostrar.

Sea $\psi = \varphi \circ s$:

$$\begin{tikzcd} V_o \subseteq R^2 \arrow[rr, "\varphi"] & & S \\ & V_o^* \subseteq R^2 \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Como φ es una parametrización y s es un difeomorfismo, se sigue que $\psi = \varphi \circ s$ es una parametrización de S .

En esta forma se construye un atlas compatible, obteniéndose una nueva orientación $\mathcal{O}_2$ para S , llamada orientación opuesta de $\mathcal{O}_1$. Sea $\mathcal{P}_2$ el atlas compatible asociado a $\mathcal{O}_2$. Puesto que para cada $(V, \varphi) \in \mathcal{P}_2$ con

$$\psi'(p_2) = (\varphi \circ s)'(p_2) = \varphi'(s(p_2))\, s'(p_2) = \varphi'(u, v)\, s'(v, u) ,$$

y $det(J(s(v, u))) = -1 < 0$, $p_2 \in V$, Se sigue que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ no son compatibles, de donde $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ son dos orientaciones distintas de S .

3. Sea $p \in S$. Entonces, se sigue de 2 , que

$$(T_pS, \mathcal{O}_1) \nsim (T_pS, \mathcal{O}_2) .$$

4. Supongamos que exista una tercera orientación $\mathcal{O}_3 \in \mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{O}_3 \neq \mathcal{O}_2$ y $\mathcal{O}_3 \neq \mathcal{O}_1$. Sea $\mathcal{P}_3$ el atlas compatible asociado a $\mathcal{O}_3$. Entonces, para cada punto $p \in S$, existe $(W, \alpha) \in \mathcal{P}_3$ tal que

$$p = \alpha(p_3) , \quad \alpha'(p_3) : R^2 \to (T_pS, \mathcal{O}_3) > 0 .$$

5. Sean entonces

$$U_1 = \{ p \in S ; (T_pS, \mathcal{O}_3) \sim (T_pS, \mathcal{O}_1) \} ,$$

$$U_2 = \{ p \in S ; (T_pS, \mathcal{O}_3) \sim (T_pS, \mathcal{O}_2) \} .$$

Claramente $U_1 \neq \phi \neq U_2$, pues estamos suponiendo $\mathcal{O}_3 \neq \mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_3 \neq \mathcal{O}_2$ en S. Se tiene

α) $U_1 \cap U_2 = \phi$. Pues si $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, existiría $p \in U$ tal que

$$(T_pS, \mathcal{O}_3) \sim (T_pS, \mathcal{O}_1) \quad \text{y} \quad (T_pS, \mathcal{O}_3) \sim (T_pS, \mathcal{O}_2)$$

de donde, por la transitividad de la relación $\sim$,

$$(T_pS, \mathcal{O}_1) \sim (T_pS, \mathcal{O}_2) ,$$

lo cual es contradictorio según 3.

β) $U_1 \cup U_2 = S$. En efecto, sea $p \in S$. Entonces

$$(T_pS, \mathcal{O}_3) \sim (T_pS, \mathcal{O}_2) , \text{ ó } , (T_pS, \mathcal{O}_1) \sim (T_pS, \mathcal{O}_3) .$$

pues estamos suponiendo que S es orientable. De aquí se sigue que

$$p \in U_1 \cup U_2 .$$

γ) U_1 y U_2 son abiertos. En efecto, sea $p \in U_1$. *Entonces, en* p, *los atlas* $\mathcal{P}_1$ *y* $\mathcal{P}_3$ *son compatibles*. Por lo tanto, existe una vecindad W de p en donde todos los puntos de W tienen la misma orientación que la de p (ver

§ 3 definición 2.) Se sigue de aquí que $p \in W \subseteq U_1$ y, por lo tanto, que U_1 es abierto. Análogamente se muestra que U_2 es abierto.

De α), β) y γ) se sigue que S no es conexo, lo cual es contradictorio.

Bibliografía

[1] Lima, Elon L. *Introducão á Topologia Diferencial,* (Colecão publicada sob. a direcão de L. Nachbin, Rio de Janeiro 1961).

[2] Hicks, Noel J. *Notes on Differential Geometry* (Van Nostrand Reinhold Company 1965).

[3] do Carmo, Manfredo P. *Elementos de Geometría Diferencial.* (Ao livro téc - nico S. A. e Editôra Universidade de Brasilia 1971).

[4] Chern S.S. Topics in differential geometry (Inst. Adv. Study, Princeton 1951).