Boletín de Matemáticas
Vol. IX, N° 1 pp. 1-37

¿ QUE ES LA MATEMATICA MODERNA ?(*)

F. SMITHIES

1. *Introducción.*

Lo primero que debe decirse acerca de lo que comunmente se llama matemática "moderna" es que realmente no es tan moderna como podría suponerse. Gran parte de ella fue de hecho creada hace más de cincuenta años (*). Lo que le da un aire de novedad es que sólamente en la última generación ha tenido un efecto serio en la enseñanza de matemáticas en las carreras de nuestras universidades y sólamente en los últimos años se ha empezado a sentir su impacto en las matemáticas de la escuela secundaria. Un tal desfasamiento es natural e inevitable; las nuevas matemáticas usualmente se crean como herramientas de investigación y mientras no sean más que eso no hay razones que obliguen a buscar la forma más simple de exponerlas o a reexaminar a la luz de ellas partes más elementales de la matemática. Es al empezar a enseñar un tema nuevo cuando la simplificación principia y cuando esto se ha logrado uno empieza a apreciar las posibles ventajas del nuevo punto de vista en niveles más elementales.

Quiero ilustrar esto examinando las líneas de cambio en un tema particular y más bien elemental ; con este propósito he escogido el álgebra lineal y, en parti-

(*) Este artículo fué originalmente publicado con el título "What is Modern Mathematics?" en "The Mathematical Gazette" vol. XLVII, 1963 y se publica con la autorización de dicha revista. N. del E.

cular, la teoría sobre las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

El problema de resolver sistemas de la forma

$$ax + by = p \, ,$$
$$cx + dy = q \, ,$$

con coeficientes numéricos, fue atacado exitosamente por los antiguos babilonios y en las matemáticas escolares son familiares, desde hace largo tiempo, los ejercicios acerca de soluciones de n ecuaciones con n incógnitas, para valores pequeños de n. Hasta el siglo diez y ocho poca atención se prestó a los casos excepcionales, cuando el sistema no tenía solución o tenía muchas ; esos casos se consideraban como accidentes desagradables resultantes de un problema mal planteado. Vale la pena señalar de pasada el viejo hábito matemático de considerar que un problema debe tener una solución única o, en el peor de los casos, un número finito de soluciones (como en las ecuaciones cuadráticas). Esto está probablemente ligado al hecho de que uno lleva a cabo una operación aritmética con el objeto de calcular un resultado específico y realiza una construcción geométrica para obtener una figura bien determinada. En las matemáticas elementales muy pocas veces, como en el caso de las ecuaciones diofánticas, se obtiene un rango infinito de soluciones de un problema dado.

El siglo diez y ocho aportó el concepto de determinante y la solución explícita, por la regla de Cramer, de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Pero el caso excepcional permaneció en la penumbra; inclusive Jacobi lo dejó de lado, con la observación de que la clasificación de sistemas con determinante nulo parecía ser un asunto tedioso.

El descubrimiento, por Sylvester, de la noción de rango y la creación por Cayley, del cálculo de matrices lograron nuevos progresos ; sus trabajos condujeron a una teoría completa de los sistemas de ecuaciones lineales a la cual contribuyeron Kronecker, Dodgson y otros. La teoría descansaba fuertemente en las propiedades de los determinantes, ya que el rango de una matriz se definía como el orden de su máximo menor no nulo y así continuó haciéndose hasta fechas comparativamente recientes ; una soberbia exposición de esta versión puede hallarse en la *Introduction to higher algebra* (Introducción al Algebra Superior), 1907, de Bocher. Mi propia introducción al tema en 1929 era una serie de lecciones en las cuales todo el énfasis estaba en el estudio de las propiedades de los determinantes por sí mismas, y las aplicaciones a sistemas de ecuaciones eran incidentales.

Las herramientas para el siguiente paso fueron creándose durante la última parte del siglo diez y nueve. Los matemáticos gradualmente fueron liberándose de la idea de que una ecuación expresaba una igualdad entre números ; la aparición, primero de los números complejos y luego de los cuatemios, inició este proceso ; la teoría de grupos contribuyó a su desarrollo y el cálculo de matrices de Cayley hizo aún más. Hasta entonces el lenguaje geométrico se había confinado a situaciones que podrían ilustrarse en un espacio de dos o tres dimensiones, pero Cayley lo usó temeraria y exitosamente en el caso n-dimensional. El Ausdehnungslehre (Teoría de la extensión), 1844 y 1862, exhibía un punto de vista aún más geométrico, siendo un primer intento hacia una geometría intrínseca de un espacio de n dimensiones ; definía, por ejemplo, la noción de independencia lineal de un conjunto de vectores y la de dimensión de un subespacio. En este punto no puedo resistir la tentación de citar una observación de una de las notas históricas de Bourbaki (*Algebre*, Cap. III) : " situados entre, por una parte, los métodos puramente sintéticos, una especie de lecho de Procustes sobre el cual sus ortodoxos discípulos se someten a la tortura y, por otra, los métodos analíticos, ligados a un sistema de coordenadas impuesto arbitrariamente al espacio, uno siente la necesidad de algún tipo de cálculo geométrico, tal como el soñado, pero no creado, por Leibnitz e imperfectamente bosquejado por Carnot."

El primer intento parcialmente exitoso hacia un tal cálculo fué quizás el realizado por la escuela cuaternista de Hamilton, Tait y sus seguidores; de aquí nacieron otras formulaciones del algebra vectorial, en las cuales los productos escalar y vectorial eran tratados separadamente. Por mucho tiempo, sin embargo, la mayor parte de estos trabajos se referían sólamente al espacio de 3 dimensiones, y se consideraban más como una herramienta para el matemático aplicado que como un lenguaje geométrico para el álgebra.

Hacia fines del siglo diez y nueve empezaron a aparecer, en conexión con investigaciones sobre los fundamentos lógicos del tema, formulaciones axiomáticas de varias porciones de la Matemática; son bien conocidos los trabajos de Pasch, Hilbert y otros en los fundamentos de la geometría que corregían las fallas en el sistema de axiomas de Euclides, como también lo son los axiomas de Peano para los números naturales. Menos familiar, pero de mayor importancia en la presente discusión, fué la enunciación por parte de Peano, en 1888, de un sistema de axiomas para un espacio vectorial real con un número finito de dimensiones.

El siguiente gran paso fué dado como resultado de las primeras investigaciones sobre espacios vectoriales infinitodimensionales en los albores del presente siglo. Hilbert había usado un espacio particular de esta clase como herramienta en la teoría de las ecuaciones integrales; un punto de este espacio es una sucesión infinita $(x_1, x_2, \ldots)$ de números reales tal que la serie $x_1^2 + x_2^2 + \cdots$ es convergente. E. Schmidt y M. Fréchet introdujeron sistemáticamente el lenguaje geométrico en la discusión del espacio de Hilbert. Por algún tiempo habían aparecido esporádicamente en Matemáticas sistemas con una infinidad de ecuaciones lineales en una infinidad de incógnitas y von Koch había atacado valientemente estos problemas creando una teoría de determinantes infinitos la cual, sin embargo, reveló ser de limitada aplicabilidad. En 1909 Toeplitz abandonó el enfoque vía determinantes y trató dichos sistemas por medio de lo que ahora deberíamos llamar métodos vectoriales ; estos fueron recogidos por F. Riesz y otros para la investigación de los numerosos espacios infinito dimensionales que rápidamente aparecían en escena.

La axiomatización llegó lentamente–pues no era aún un hábito matemático–pero comenzó en 1922 cuando Banach y Wiener, independientemente, dieron sistemas de axiomas para una amplia clase de espacios infinito-dimensionales ; alrededor de 1929 von Neumann y Stone formularon axiomas para los espacios de Hilbert. Al mismo tiempo se difundía lentamente el convencimiento de que ahora era posible dar un nuevo enfoque al caso infinito-dimensional ; el uso de los determinantes en la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales fue gradualmente abandonado en favor de los métodos vectoriales. Los axiomas de espacio de Hilbert, con algunos cambios menores, proporcionaron una axiomatización nueva y simple para los espacios euclideanos finito dimensionales y por lo tanto un cálculo geométrico de la clase mencionada por Bourbaki, capaz de dar descripciones simples de una gran gama de situaciones geométricas, sin sujeción a un sistema particular de coordenadas "impuesto arbitrariamente al espacio".

El desarrollo de veloces computadoras electrónicas también ayudó a relegar los determinantes ; se encontró que la solución explícita de un sistema de ecuaciones lineales en términos de determinantes no era, en la práctica, la manera más rápida ni la más confiable para obtener la respuesta.

La evolución que he descrito ha dado como resultado una nueva unión del álgebra y la geometría proporcionando, como veremos más detalladamente adelante, un acceso mucho más directo a la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales; la introducción de ideas procedentes del análisis también se ha facilitado y se ha hecho más accesible, por ejemplo, la discusión de las propiedades de los conjuntos convexos y las desigualdades lineales así como sus aplicaciones a la programación lineal.

En el resto de este artículo cambiaré la dirección del enfoque de nuestro tema; en lugar de examinar el impacto de ideas matemáticas nuevas en un sector de las matemáticas elementales, consideraré uno tras otro algunos de los conceptos básicos de la matemática contemporánea tratando de indicar su influencia unificadora en diversas ramas del pensamiento matemático.

2. *La Teoría de Conjuntos.*

2.1. Empezamos con el concepto de conjunto el cual es hoy en día el más fundamental en toda la estructura de la Matemática. No deseo verme involucrado aquí en las dificultades lógicas y paradojas que han fastidiado a la teoría de conjuntos en los últimos 60 años ; simplemente adoptaré el punto de vista desprevenido según el cual un conjunto es una cierta colección de objetos del pensamiento, e. g. puntos ó números ó vectores. De hecho, las paradojas y las distinciones sutiles que enfrenta el lógico matemático sólo raramente afectan la labor del trabajador matemático ; y cuando ellas levantan sus desagradables cabezas es normalmente bastante fácil hallar una manera práctica de evitar la dificultad.

En consecuencia, consideramos un conjunto como una colección de objetos o *elementos* y usamos la notación $x \in A$ para indicar que el elemento x pertenece o es un miembro del conjunto A. Por ejemplo, si x es un punto del plano y A es una línea en el mismo plano, considerada como el conjunto dé todos los puntos que la conforman, entonces $x \in A$ quiere que el punto x está en la línea A.

2.2. Decimos que el conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B, o que A está contenido en B, y escribimos $A \subset B$, si cada elemento que pertenece a A también pertenece a B. Por ejemplo, el conjunto A de los múltiplos enteros de 4 es un subconjunto del conjunto B de los números pares. Se considera que un conjunto es un subconjunto de si mismo, de tal manera que siempre tenemos $A \subset A$.

El conjunto de los elementos x tales que $x \in A$ y $x \in B$, esto es, la parte común o *intersección* de A y B se denota por $A \cap B$. Si A y B no tienen elementos comunes, en otras palabras, si A y B son *disyuntos* decimos que su intersección es el *conjunto nulo* o *conjunto vacío*, el cual denotamos por ϕ; en este caso podemos entonces escribir $A \cap B = \phi$. Consideramos que ϕ es un subconjunto de cualquier conjunto de tal manera que siempre tenemos $\phi \subset A$.

Siempre se hace distinción entre un elemento x y el conjunto $\{x\}$ cuyo único miembro es x; los enunciados $x \in A$ y $\{x\} \subset A$ son equivalentes uno al otro. Podemos observar la conveniencia de tal distinción señalando que ϕ no tiene elementos pero $\{\phi\}$ tiene un elemento.

Si A es un subconjunto de un conjunto fijo E, el conjunto de los elementos x que pertenecen a E pero no a A se llama el *complemento* de A (en E) y puede denotarse por $\complement A$, A' ó $E \sim A$. Claramente $E' = \phi$, $\phi' = E$, $(A')' = A$.

El conjunto de los elementos x tales que $x \in A$ ó $x \in B$ (o ambas) se llama la *unión* de A y B y se denota por $A \cup B$. Si A y B son ambos subconjuntos de un conjunto fijo E, se verifica fácilmente que $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$. Estos resultados se describen diciendo que las operaciones de unión e intersección son duales una de la otra, con respecto a la complementación.

Hay numerosas identidades que conectan las tres operaciones que hemos introducido ; por ejemplo, tenemos

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

y también leyes como $A \cup A = A \cap A = A$.

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado E con respecto a estas tres operaciones, es un ejemplo de un *álgebra de Boole* : tales álgebras aparecen en muchas partes; desde lógica hasta circuitos eléctricos con interruptores y tienen estrechos vínculos con el diseño de computadores digitales.

De la estructura formal del álgebra de conjuntos y su posición central en el tema podemos en este punto derivar una lección para las matemáticas elementales. Anteriormente los matemáticos estaban entregados al hábito de pensar que cualquier condición impuesta, digamos, a la posición de un punto, debería ser expresable por medio de una o más ecuaciones y, más aún, introdujeron una palabra especial, "locus" (lugar), para describir un conjunto de puntos determinado de esta manera. Pero la negación de una ecuación no es una ecuación ; ¿por qué no considerar, por ejemplo, el conjunto de puntos (x, y) del plano tal que $ax + by \neq p$, o el conjunto (un semiplano) en el cual $ax + by < p$? Tales conjuntos son a menudo extremadamente útiles ; por ejemplo, el interior de un polígono convexo puede siempre representarse como la intersección de un número finito de semiplanos. Un campo nuevo de la matemática, la programación lineal, con sus numerosas aplicaciones en proyectos a gran escala y de diversas clases, se ocupa principalmente de resolver sistemas de tales desigualdades lineales.

2.3. Frecuentemente queremos considerar conjuntos cuyos elementos son a su vez conjuntos ; ya hemos mencionado el conjunto $\{\phi\}$; por otra parte, podemos formar el conjunto de todas las rectas en un plano dado. Un ejemplo especialmente importante es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado E ; este conjunto se denota $\mathcal{P}(E)$.

Otra operación importante es la formación del producto de dos conjuntos A y B. Si $x \in A$ y $y \in B$, denotamos por (x,y) la *pareja ordenada* formada por x como primer elemento y y como segundo elemento ; de tal manera que $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. El conjunto de todas las parejas ordenadas (x,y) con $x \in A$ y $y \in B$ es el *producto* de A y B y usualmente se denota por $A \times B$. Por ejemplo, si A y B son ambos iguales a la recta real, entonces $A \times B$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x,y) de números reales y puede representarse por medio del conjunto de todos los puntos de un plano ; de aquí la hoy común notación $\mathbb{R}^2$ (abreviación de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) para designar un plano dado.

3. *Relaciones y Funciones.*

3.1. Sean E y F dos conjuntos dados ; supondremos, para evitar casos triviales y de excepción, que ninguno de ellos es vacío. Supongamos también que sabemos lo que significa decir que un elemento x de E está en la relación R con un elemento y de F y escribamos $x R y$ para indicar esta afirmación. Diremos en este caso que R es una relación en (E, F); o en E, cuando $E = F$. Por ejemplo, E y F pueden designar ambos el conjunto de los números reales y R puede ser la relación $<$; en este caso $x R y$ quiere decir simplemente $x < y$.

Dada una tal relación R, podemos definir un subconjunto correspondiente G_R del producto $E \times F$; G_R es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) tales que $x \in E$, $y \in F$ y además $x R y$. Decimos que G_R es la *gráfica* de la relación R; se trata de la natural extensión a esta situación de la noción elemental de gráfica de una función. Recíprocamente, si G es un subconjunto arbitrario de $E \times F$, podemos definir R conviniendo que $x R y$ significa simplemente que $(x, y) \in G$; entonces G es la gráfica de la relación R. Luego hay una correspondencia uno-a-uno entre relaciones en (E, F) y subconjuntos de $E \times F$.

En esta sección describiremos tres clases especialmente importantes de relaciones: relaciones de equivalencia, relaciones de orden y funciones.

3.2. Si E es un conjunto dado, una relación R en E es una *relación de equivalencia* si satisface las condiciones siguientes :

(i) $x R x$ (para todo $x \in E$);

(ii) Si $x R y$, entonces $y R x$

(iii) Si $x R y$ y $y R z$, entonces $x R z$.

Estas tres condiciones también se enuncian diciendo que R es (i) reflexiva,

(ii) simétrica y (iii) transitiva. Son ejemplos de relaciones de equivalencia: la igualdad en un conjunto arbitrario E; la relación $x R y$ definida en los enteros e indicando que $x-y$ es divisible por un entero fijo m; la relación de paralelismo entre líneas rectas en el plano, con la convención de que cualquier recta es paralela a si misma.

Cuando R es una relación de equivalencia en E, es posible realizar una partición de E en clases de equivalencia disyuntas entre sí; todos los miembros de una misma clase son equivalentes entre sí y dos elementos pertenecientes a clases distintas nunca son equivalentes entre sí. Cuando R es la igualdad en E cada clase contiene un solo elemento; en nuestro segundo ejemplo, todos los miembros de una misma clase dejan el mismo residuo al ser divididos por m; en el tercer ejemplo cada clase corresponde a una dirección en el plano. Recíprocamente, cualquier partición de E en clases (subconjuntos) disyuntas determina una relación de equivalencia en E; en este caso convenimos que $x R y$ significa que x y y pertenecen a una misma clase de la partición.

El conjunto de todas las clases de equivalencia resultantes al partir E por R se llama el *cociente* de E por R y se denota E/R. Cada clase en el cociente puede especificarse por medio de un elemento representante; e.g. especificar una dirección dando una recta en tal dirección.

3.3. Se dice que una relación R en un conjunto E es una *relación de orden* y que E es un *conjunto ordenado* (por R) si R tiene las siguientes propiedades:

(i) $x R x$ (para todo $x \in E$);

(ii) Si $x R y$ y $y R x$, entonces $x = y$;

(ii) Si $x R y$ y $y R z$, entonces $x R z$.

Una relación de orden es entonces reflexiva, antisimétrica y transitiva. Ejemplos: la relación $x \leq y$ en los números reales; si E es el conjunto de todas las funciones reales $f(t)$ de una variable real t conviniendo que $f \leq g$ significa que $f(t) \leq g(t)$ para todo real t; si E es el conjunto de los enteros positivos y $m R n$ quiere decir que m divide a n, es decir, que $mq = n$ para algún entero q; la relación $A \subset B$ entre subconjuntos de un conjunto E.

No hemos supuesto que dados x y y en E deba tenerse $x R y$ ó $y R x$; si esto sucede, como en el caso de la relación $x \leq y$ en los números reales, diremos que E es totalmente *ordenado* por R.

Para ilustrar un poco más la vasta aplicabilidad de las propiedades de las relaciones de orden pasamos a introducir una definición más. Sea $\leq$ una relación de orden en E y sean x y y elementos de E; si hay un elemento u de E tal que $x \leq u$, $y \leq u$ y además $u \leq v$ para todo v tal que $x \leq v$ y $y \leq v$ diremos que u (el cual es único, si existe) es la *mínima cota superior*, *extremo superior* o *supremo* de x y y y se escribe $u = sup(x, y)$. Una definición similar puede darse para *la máxima cota inferior*, *extremo inferior* o *ínfimo*, $inf(x, y)$, de x y y. Un conjunto ordenado en el cual cada par de elementos posee un supremo y un ínfimo se llama un *retículo*. Todos los ejemplos mencionados son retículos; anotamos que, en el caso de la relación $A \subset B$, se tiene $sup(A, B) = A \cup B$, $inf(A, B) = A \cap B$; en el caso de la relación "m divide a n", $sup(m, n)$ es el mínimo común múltiplo de m y n e $inf(m, n)$ es el máximo común divisor. Así, las más diversas situaciones encuadran en la misma teoría general y muchas de sus propiedades pueden obtenerse de una sola vez.

Como ejemplo de un conjunto ordenado que no es un retículo, considérese el conjunto de todas las funciones reales $f(t)$ que tienen derivada continua, con la relación de orden antes mencionada; si $f(t) = t$ y $g(t) = 0$, entonces $sup\,(f,g)$ no existe en dicho conjunto.

3.4. Se dice que una relación R en un par de conjuntos (E, F) es *funcional* o que es una *función* si siempre que $x\,R\,y$ y $x\,R\,z$ se tiene $y = z$. El subconjunto D de E formado por todos los elementos x tales que $x\,R\,y$ para algún $y \in F$ se llama el *dominio de definición* o *dominio* de la función. Para cada $x \in D$ existe un único y en F tal que $x\,R\,y$; esto nos permite introducir la notación funcional usual, escribiendo, por ejemplo, $y = f(x)$, en lugar de $x\,R\,y$. Hay numerosos nombres para el concepto de función, según el contexto, e.g. aplicación, transformación, operador.

En las circunstancias descritas, decimos que la función f aplica su dominio D *en* el conjunto F. El conjunto S de todos los y de F tales que $y = f(x)$ para algún x en D se llama el *recorrido* o *imagen* de la función, podemos entonces decir que f aplica D *sobre* S. Usualmente es conveniente tener $D = E$ y de ahora en adelante supondremos ordinariamente que este es el caso; en otras palabras, la función f está definida en todo el conjunto E.

En este punto es conveniente introducir alguna terminología reciente. Si la función f aplica E sobre F, de tal manera que $S = F$, se dice que es una *sobreyección* o que es *sobreyectiva*. Si la función f que aplica E en F es tal que $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$, se dice que es *uno-a-uno* (*1-1*) o *inyectiva* o que es una *inyección*. Si f es a la vez inyectiva y sobreyectiva se dice que es *biyectiva* o que es una *biyección*; también puede describirse una biyección como una correspondencia 1-1 entre E y F.

Una función de dos variables x y y, definida para $x \in E$ y $y \in F$, puede considerarse como una función de una sola variable que recorre el producto $E \times F$. La extensión a funciones de cualquier número finito de variables es entonces inmediata.

3.5. Las experiencias de los matemáticos en el uso del concepto general de funcion, en el sentido que acabamos de describir, les han enseñado ciertas lecciones que son aplicables a las matemáticas elementales. En primer lugar, no es deseable considerar a las llamadas "funciones multivaluadas (o multiformes)" como funciones genuinas; ellas no satisfacen nuestra definición y deben propiamente ser consideradas como relaciones; llamarlas funciones trae ciertamente confusiones y puede conducir a paradojas y contradicciones. A partir de ellas, pueden, por supuesto, obtenerse verdaderas funciones, de varias maneras: puede darse una regla para escoger un único valor correspondiente a cada elemento del dominio, como se hace al definir el valor principal del logaritmo de una variable compleja; también puede hacerse corresponder a cada x de E el conjunto de todos los los y de F relacionados con x, construyendo así una genuina función que aplica E en $\mathcal{P}(F)$.

En segundo lugar, los matemáticos han aprendido por experiencias a veces amargas que la única forma manejable de definir la igualdad de dos funciones es esta: $f = g$ si y sólo si (i) f y g tienen el mismo dominio de definición D, y (ii) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$. Así, la función x^2 definida sobre el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ debe distinguirse de la función x^2 definida sobre el intervalo $0 \leq x \leq 2$; estas dos funciones coinciden en la intersección de sus dominios, pero no deben considerarse idénticas ; ambas son *restricciones* , a sus respectivos dominios, de la función x^2 definida sobre $-1 \leq x \leq 2$ o sobre algún dominio mayor. Puede parecer pedante insistir en este punto pero esto es de considerable importancia histórica ; no hace mucho más de un siglo que los matemáticos empezaron a liberarse de la idea de que una función es lo mismo que una expresión algebraica o analítica, idea esta cuyos rastros aún permanecen hoy en muchas secciones de la enseñanza elemental .

Otra diferencia importante es la existente entre una sucesión (x_n) y el conjunto de sus valores. Una sucesión es sencillamente otro nombre para una función cuyo dominio de definición es el conjunto de los enteros positivos ; el conjunto de valores de la sucesión es precisamente el recorrido de esa función. Así, $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ es una sucesión infinita pero el conjunto de sus valores es el conjunto finito $\{0, 1\}$. Esta diferencia aparece a menudo acompañada en las presentaciones elementales de las ideas fundamentales del análisis.

4. *Operaciones algebraicas.*

4.1. Sea E un conjunto dado. Por una *ley de composición en* E entendemos una función f definida en un subconjunto A de $E \times E$ y que toma valores en E . En aras de la sencillez, supondremos que $A = E \times E$. Entonces , a cada pareja ordenada (x, y) en $E \times E$ le corresponde un único elemento $z = f(x,y)$ en E . En la mayoría de los casos no usamos un símbolo funcional sino que escribimos x y luego y con, o sin, un símbolo especial entre ellos, e. g. $z = x + y$, $z = xy$, $z = x - y$. Para fines generales podemos usar algún símbolo neutral ; escribiremos entonces

$$z = x \circ y$$

A manera de ejemplos podemos mencionar la adición o la multiplicación en los números enteros o en los reales, la operación $A \cup B$ entre subconjuntos de un conjunto dado, la operación $sup(x,y)$ en un retículo .

Hay un cierto número de propiedades que una ley de composición dada puede o no poseer ; mencionaremos algunas de las más importantes.

Una ley puede ser *conmutativa* , es decir :

$$x \circ y = y \circ z \qquad (x, y \in E).$$

Una ley puede ser *asociativa*, es decir

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \qquad (x, y, z \in E).$$

Puede existir un *elemento neutro* e con respecto a la ley, es decir :

$$x \circ e = e \circ x = x \qquad (x \in E);$$

anotemos que si existe un elemento neutro entonces es automáticamente único , pues si e' es también un elemento neutro, entonces

$$e = e \circ e' = e'$$

Por ejemplo, la adición y la multiplicación de números reales poseen todas estas propiedades ; los elementos neutros son 0 para la adición y 1 para la multiplicación.

La función f_a definida por $f_a(x) = a \circ x$ $(x \in E)$ se llama la *translación a izquierda por* a ; si toda translación a izquierda es inyectiva, es decir , si $a \circ x = a \circ x'$ siempre implica que $x = x'$, decimos que la ley posee la *propiedad cancelativa a izquierda*. Y análogamente para translaciones a derecha.

Si existe un elemento neutro e y, para un x en E dado, hay un elemento x' en E tal que $x \circ x' = x' \circ x = e$, decimos que x' es un *inverso* de x. Si la ley de composición es asociativa entonces el inverso, cuando existe, es único, pues si x'' es también un inverso de x, entonces

$$x' = x' \circ e = x' \circ (x \circ x'') = (x' \circ x) \circ x'' = e \circ x'' = x''$$

Para ilustrar estas definiciones observemos que, para la multiplicación en los enteros, se verifican la propiedad cancelativa excepto cuando uno de los facto - res es 0, sin embargo, no todo elemento tiene un inverso ; para la multiplicación de matrices $n \times n$, con $n \geq 2$, fallan las reglas cancelativas así como la con- mutatividad, pero aún se tiene asociatividad y elemento neutro ; todas las propie- dades mencionadas, excepción hecha de las reglas de cancelación, fallan para sustracción de números reales.

En matemáticas se presentan con gran frecuencia leyes de composición que po- seen ciertas combinaciones de estas propiedades. Por ejemplo, si en un conjunto dado E tenemos una ley de composición asociativa, con elemento neutro y tal que cada elemento de E posee un inverso, decimos que esa ley determina una *estructura de grupo* sobre E o que E es un *grupo* bajo dicha ley. Así, los nú- meros reales forman un grupo bajo la adición y los números reales no nulos for - man un grupo bajo la multiplicación ; ambos son grupos conmutativos. Un ejemplo de grupo no conmutativo lo constituyen las matrices $n \times n$ no singulares (con $n \geq 2$) bajo la multiplicación .

En ciertas ocasiones podemos tener más de una ley de composición definida en un conjunto E cumpliéndose ciertas relaciones especiales entre ellas. De - signando las dos leyes por $x \circ y$ y $x * y$ podremos, por ejemplo, tener :

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) ,$$

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z) .$$

Decimos entonces que $\circ$ es *distributiva* con respecto a $*$. Así, en el caso de los números reales, la multiplicación es distributiva con respecto a la adición; por otra parte, en el álgebra de conjuntos, tenemos

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) ,$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) ,$$

de tal manera que la unión y la intersección son distributivas, cada una con respecto a la otra.

4.2. Otro tipo de operación algebraica resulta cuando se considera una función definida en $E \times F$ y que toma valores en F ; hablamos entonces de una *ley de composición externa* entre E y F. Cuando, como con frecuencia ocurre, E juega sólo un papel subsidiario, podemos decir simplemente que la ley está definida en F. Por ejemplo, sea E el conjunto de los números reales y sea F el conjunto de los vectores del espacio euclideano ; podemos entonces formar el producto λx de un número real λ por un vector x. Pueden tenerse varias relaciones con otras leyes ; así, si $\circ$ designa una ley interna en E, podemos tener asociatividad mixta : $(\lambda \circ \mu) x = \lambda (\mu x)$. A menudo nos representamos los elementos de E como operadores que actuan sobre los elementos de F .

Aún más, otro tipo de operación se presenta cuando tenemos una función definida en $E \times E$ y que toma valores en otro conjunto F . Como ejemplo, tomemos como E el conjunto de los vectores en el espacio euclideano y sea F el conjunto de los números reales ; podemos entonces formar el producto escalar o interno

$x \cdot y$ de cada par de vectores de E. De nuevo podemos tener en estos casos varias relaciones de asociatividad y distributividad con respecto a las otras leyes.

4.3. Fuera de los grupos las estructuras algebraicas más importantes son los anillos, los cuerpos y los espacios vectoriales. Haremos una breve descripción de cada uno.

En un *anillo* tenemos dos operaciones internas, denotadas ordinariamente por $x+y$ y xy; bajo la primera operación el conjunto es un grupo conmutativo; la segunda operación es asociativa y también distributiva, con respecto a la primera. Ejemplos: los enteros, o los números reales, o las matrices $n \times n$, en cada caso con respecto a la adición y la multiplicación.

Un *cuerpo* es un anillo con la propiedad adicional de que al quitar el elemento neutro de la primera operación (usualmente denotado por 0) el resto del conjunto forma un grupo bajo la segunda operación. Ejemplos: los números racionales, los reales, los complejos, los cuaternios. En este último caso la multiplicación no es conmutativa.

Decimos, finalmente, que E es un *espacio vectorial sobre un cuerpo* K. Si (I) hay una ley de composición interna denotada por $x+y$ bajo la cual E es un grupo conmutativo, (ii) hay una ley de composición externa en E, denotada por λx, donde $\lambda \in K$ y $x \in E$, con las siguientes propiedades: (a) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$, (b) $1 \cdot x = x$, donde 1 es el elemento neutro de la multiplicación en K, (c) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, y (d) $(\lambda + \mu) x = (\lambda x) + (\mu x)$. Fácilmente se comprueba que, en este sentido, los vectores del espacio euclideano forman un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Existen muchos otros tipos de estructuras algebraicas; mencionamos únicamente las álgebras sobre un cuerpo y los módulos sobre un anillo.

Detengámonos un momento para preguntarnos cuál es el propósito de toda la terminología y notación que hemos introducido en esta sección. Estas han demostrado ser de valor por varias razones. En primer lugar, nos permiten construir una clasificación sistemática de las estructuras algebraicas que se presentan en la práctica y reconocer rápidamente si una estructura dada posee una propiedad o conjunto de propiedades particulares. En segundo lugar, promueven economía de pensamiento ; una vez que hayamos demostrado que los anillos, por ejemplo, tienen ciertas propiedades en común, no necesitamos establecer separadamente estas propiedades para los enteros, los números reales, las matrices, etc. En tercer lugar, y quizás de mayor importancia, cuando encontramos un nuevo espécimen de una de estas estructuras, estamos en posición de preguntar qué cosas allí corresponden a los conceptos que ya sabemos son importantes en las estructuras de este tipo ; si podemos encontrar respuestas a estas preguntas, habremos obtenido información valiosa acerca de nuestra nueva estructura.

4.4. Deseo ahora introducir algunas ideas algebraicas adicionales ; para no tener que mantenernos en un elevado nivel de abstracción emplearé una sola estructura a guisa de modelo en el cual pueden ilustrarse todas estas ideas. Con este propósito tomaré los espacios vectoriales ; en realidad, podemos suponer que estamos trabajando con vectores del espacio euclideano tridimensional ordinario con alguna incursión ocasional en n dimensiones. Espero que estas digresiones ayudarán a su vez a señalar en más detalle porqué las ideas modernas han actuado sobre la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales en la forma descrita en la primera sección de este artículo.

Sea E un espacio vectorial sobre, digamos, los números reales. Nos preguntamos primero cuáles subconjuntos de E son a su vez espacios vectoriales bajo las mismas leyes de composición ; de hecho, un subconjunto M tendrá esta propiedad si (i) $x+y \in M$ siempre que $x \in M$ y λ es un número real. Se tiene entonces que $0 = 0 \cdot x \in M$ y que $-x = (-1)\,x \in M$ siempre que $x \in M$. Decimos en este caso que M es un *subespacio* vectorial de E.

Si A es un subconjunto de M existen subespacios de E que contienen a A, por ejemplo el mismo E ; la intersección M de todos estos subespacios es de nuevo un subespacio y es el menor de los que contienen a A. Decimos que M es el subespacio *generado* por A ; en realidad se trata del conjunto de todas las combinaciones lineales finitas.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n ,$$

donde n es un entero positivo arbitrario, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son elementos de A y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números reales arbitrarios.

Sea ahora R una relación de equivalencia en E ; diremos que R es *compatible* con la estructura de espacio vectorial de E si (i) $x\,R\,x'$ junto con $y\,R\,y'$ implican que $(x+y)\,R\,(x'+y')$ y (ii) $x\,R\,x'$ implica que $(\lambda x)\,R\,(\lambda x')$ para todo número real λ. Sea M la clase de equivalencia que contiene al elemento 0 de E ; podemos entonces demostrar bastante fácilmente que M es un subespacio vectorial de E y que se tiene $x\,R\,x'$ si y sólo si $x - x' = x + (-1)\,x \in M$. Recíprocamente, si M es un subespacio cualquiera de E, la relación $x - x' \in M$ es una relación de equivalencia en E. El cociente E/R, al cual denotaremos ahora por E/M, es el conjunto de todas las clases de equivalencia con respecto a esta relación. Designemos por $\varphi(x)$ la clase de equivalencia que contiene al elemento x. Podemos ahora convertir a E/M en un nuevo espacio vectorial de tal manera que se satisfagan las relaciones

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \quad ,$$
$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) \quad .$$

Todos estos conceptos son claramente aplicables a cualquier estructura algebraica. Podemos preguntarnos por las subestructuras de cualquier estructura, por la subestructura generada por un subconjunto, por las relaciones de equivalencia compatibles con una estructura y por las estructuras cocientes con respecto a estas relaciones. Las cosas no son siempre tan simples como en los espacios vectoriales ; por ejemplo, no todo subgrupo de un grupo cualquiera puede ser la clase de equivalencia del elemento neutro con respecto a alguna relación de equivalencia compatible ; en esta situación aparece la clase especial de los subgrupos normales.

Sean ahora E y F dos espacios vectoriales (sobre el mismo cuerpo, el de los números reales, en este caso) y sea f una función definida en E y que toma valores en F. Diremos que f es un *homomorfismo* de E en F si se cumple que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad , \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x) \; .$$

La imagen $f(E)$ de E por la función f es un subespacio vectorial de F. La relación $f(x) = f(x')$ es una relación de equivalencia en E compatible con su estructura de espacio vectorial ; luego el conjunto de todos los $x \in E$ tales que $f(x) = 0$ es un subespacio N de E, llamado el *núcleo* o *espacio nulo* del homomorfismo.

Si un homomorfismo es biyectivo, i.e., si $f(E) = E$ y además $f(x) = f(x')$

implica $x = x'$, se llama un *isomorfismo* y decimos entonces que E y F son *isomorfos* según f. En el caso general resulta que $f(E)$ y E/N son espacios vectoriales isomorfos.

De nuevo, esta discusión puede extenderse a estructuras algebraicas generales. Podemos definir un homomorfismo f como una función que preserva las operaciones algebraicas obteniéndose también un isomorfismo entre la imagen $f(E)$ de E por el homomorfismo y el cociente de E según la relación de equivalencia compatible $f(x) = f(x')$.

4.5. Adelantemos ahora el argumento un poco más, aprovechando ciertas propiedades especiales de los espacios vectoriales. Dado un subespacio cualquiera M de un espacio vectorial, existe un sistema minimal de generadores de M, es decir, un subconjunto B de M que genera a M pero tal que ningún subconjunto propio de B genera M; a un tal sistema lo llamamos una *base* de M. Si el espacio total E tiene una base finita decimos que este es *finito dimensional* o de *dimensión finita*, siendo su *dimensión* el número de elementos de una base; el resultado (nada trivial) de que éste número es el mismo para todas las bases de E es el teorema fundamental de toda la teoría. Podemos entonces clasificar los subespacios vectoriales de E de acuerdo con su dimensión.

Consideremos ahora un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= y_k . \end{aligned} \tag{1}$$

Formamos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ de las n-plas ordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales, con las operaciones algebraicas definidas así :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n),$$
$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Análogamente formamos el espacio vectorial $\mathbb{R}^k$. El sistema de ecuaciones *(1)* puede ahora escribirse en la forma

$$f(x) = y \;,$$

donde f es un homomorfismos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$. El núcleo N de f es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo obtenido reemplazando por ceros las $y_1, \ldots, y_k$ del lado derecho de *(1)* ; la imagen $f(\mathbb{R}^n)$ según f es el conjunto de las n-plas $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ para las cuales *(1)* posee soluciones ; definimos el *rango* de f como la dimensión de $f(\mathbb{R}^n)$. Sin dificultad se demuestra que la dimensión del cociente E/N es igual a $\dim E - \dim N$; el teorema general de isomorfismo nos dice entonces que

$$\dim N + \dim f(\mathbb{R}^n) = \dim \mathbb{R}^n = n \,.$$

La teoría completa de los sistemas de ecuaciones lineales puede ahora edificarse con base en esta sola ecuación.

Lo que he tratado de hacer aquí es mostrar cuán natural llega a ser este enfoque de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales cuando se introducen en escena uno o dos conceptos que de hecho tienen sentido en una gran variedad de estructuras algebraicas, y cuán rápidamente esto conduce a los resultados centrales .

5 *Estructuras topológicas*

5.1 En la matemática clásica se encuentran nociones tales como convergencia y continuidad las cuales pasaremos a examinar ahora con el objeto de determinar cuáles son las estructuras abstractas que les corresponden en los contextos más generales.

Recordemos la definición de convergencia de una sucesión; se dice que la sucesión (x_n) de números reales es *convergente* y *converge* hacia el *límite* x cuando n tiende a infinito si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo n_o tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_o$. Escribimos esto abreviadamente en la forma

$$x_n \to x \quad \text{cuando} \quad n \to \infty, \qquad \text{ó} \qquad \lim x_n = x.$$

La función $|x-y|$ del par de variables reales (x, y) es sencillamente la distancia entre los puntos x y y de la recta real. Para dos puntos p y q del plano o del espacio euclideano tridimensional definamos la distancia $d(p,q)$ en la forma usual; hay entonces una generalización obvia de la definición anterior: la sucesión (p_n) de puntos *converge* hacia el *límite* p cuando $n \to \infty$ si $d(p_n, p) < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_o$.

Observemos que la única propiedad del espacio euclideano que interviene en esta definición es la existencia de una noción de distancia entre pares de puntos. Siguiendo el procedimiento axiomático ordinario, determinamos cuáles propiedades son deseables para una noción razonable de distancia y las usamos para conformar un sistema de axiomas; llegamos así al siguiente resultado.

5.2. Dada una colección E de elementos $x, y, \ldots$ supongamos que hay una función de valores reales $d(x,y)$ definida en $E\times E$ y que satisface las siguientes condiciones :

(i) $d(x,y)\geq 0$ para todo x, todo y :

(ii) $d(x,y)=0$ si y sólo si $x=y$:

(iii) $d(y,x)=d(x,y)$ para todo x, todo y :

(iv) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ para todo x, todo y, todo z.

Decimos entonces que E es un *espacio métrico* con respecto a la *función de distancia* o *métrica* $d(x,y)$; a los elementos de E se les acostumbra llamar *puntos* . Los requisitos (i) - (iii) son obviamente razonables, mientras que (iv) expresa la "desigualdad triangular" indicando que la suma de dos lados de un triángulo es por lo menos igual al tercer lado ; la función de distancia en el espacio euclideano claramente satisface las cuatro condiciones.

Como otros ejemplos de espacios métricos podemos mencionar (a) la superficie de una esfera, siendo $d(x,y)$ la longitud del menor arco del círculo máximo que une x con y y , (b) el conjunto de todas las funciones a valor real definidas y continuas en un intervalo cerrado $a\leq t\leq b$, definiendo la métrica por

$$d(f,g)=\max_{a\leq t\leq b}|f(t)-g(t)|$$

Introducimos enseguida algunas definiciones. Sea $x_o\in E$ y δ un número real positivo ; la *vecindad esférica* $V(x_o,\delta)$ de x_o con *radio* δ es el conjunto de todos los x de E con $d(x,x_o)<\delta$. Un subconjunto A de E se dice *abierto* si, para cada x_o de A existe δ tal que $V(x_o,\delta)\subset A$; en particular, ϕ y el mismo E son conjuntos abiertos. Se dice que el punto x_o pertenece a la *clausura* $\bar{A}$ del subconjunto A si cada vecindad de x_o contiene un punto de A ; un conjunto A tal que $\bar{A} = A$ se llama un *conjunto cerrado*. Facilmente se demuestra que si A es abierto su complemento $A^{\bullet}$ es cerrado y que, recíprocamente, el complemento de un conjunto cerrado es siempre abierto Decimos que U es una *vecindad* de x_o si alguna vecindad esférica de x_o está contenida en U .

La definición de convergencia se aplica sin cambio alguno a un espacio métrico general: $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe n_o tal que $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ siempre que $n \geq n_o$.

Sean ahora E y F espacios métricos y sea f una función definida en E y que toma valores en F. Se dice que la función f es *continua* en el punto $x_o \in E$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d[f(x), f(x_o)] < \varepsilon$ siempre que $d(x, x_o) < \delta$; la función f es *continua en* E si es continua en cada punto de E. Esta definición es la generalización inmediata y natural de la definición ordinaria para funciones reales de una variable real.

Pueden introducirse muchos otros conceptos, estableciendo relaciones entre ellos, y siendo éstos de una amplia aplicabilidad en numerosos dominios de las matemáticas. No nos detendremos a considerarlos aquí ; en vez de ello avanzaremos un paso más en el proceso de generalización.

5.3. Puede observarse que si E es un espacio métrico en el cual se nos dan las vecindades de cada punto, mas no la métrica, estamos aún en capacidad de definir todos los conceptos que hemos introducido arriba. Esto es consecuencia de los resultados siguientes : Un subconjunto A es abierto si y sólo si es vecindad de cada uno de sus puntos. Un punto x_o pertenece a la clausura $\bar{A}$ de A si y sólo si cada vecindad de x_o contiene un punto de A. La sucesión (x_n) converge hacia el límite x si y sólo si, dada cualquier vecindad U de x, existe n_o tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_o$. La función f es continua en x_o sí y sólo si, dada una vecindad cualquiera V de $f(x_o)$, hay una vecindad U de x_o tal que $f(x) \in V$ siempre que $x \in U$. Resulta así que la métrica no juega un papel esencial; su función es meramente la de proporcionar una manera de decir que un punto esta cerca o "en la vecindad" de otro.

Pero hay ocasiones en las cuales queremos considerar tipos de convergencia que no pueden derivarse de una métrica. Por ejemplo, consideremos la colección E de todas las funciones reales de una variable real y convengamos en que $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$ quiere decir simplemente que $f_n(t) \to f(t)$ cuando $n \to \infty$ para todo real t; puede demostrarse que no existe métrica alguna en E en términos de la cual pueda definirse esta convergencia. Sin embargo, introduciendo una definición apropiada de vecindad, podemos encuadrar este tipo de convergencia en el marco general. Sea n un entero positivo, sean $t_1, t_2, \ldots, t_n$, números reales arbitrarios y sea $\delta > 0$; entonces, la vecindad $V(f_o ; t_1, t_2, \ldots, t_n ; \delta)$ es, por definición, el conjunto de todas las funciones f tales que

$$| f(t_k) - f_o(t_k) | < \delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Un subconjunto U de E se llama una vecindad de f_o si contiene a $V(f_o ; t_1, t_2, \ldots, t_n ; \delta)$ para una selección adecuada de $n, t_1, t_2, \ldots, t_n, \delta$. Es entonces bastante fácil verificar que $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$, de acuerdo con esta definición de vecindad, sí y sólo si $f_n(t) \to f(t)$ para cada real t.

No es nada difícil conformar un sistema de axiomas para espacios topológicos generales en términos del concepto de vecindad; de hecho, el famoso sistema de

Hausdorff (1913) era de esta forma. No obstante, por razones técnicas, es ligeramente más sencillo tomar como fundamental el concepto de conjunto abierto, y esto es lo que haremos.

Los axiomas son entonces los siguientes: Sea E una colección de elementos $x, y, \ldots,$ y sea $\mathfrak{A}$ una colección de subconjuntos de E con las propiedades siguientes:

(i) $\phi \in \mathfrak{A}$, $E \in \mathfrak{A}$

(ii) si $A \in \mathfrak{A}$ y $B \in \mathfrak{A}$, entonces $A \cap B \in \mathfrak{A}$

(iii) la unión de cualquier colección de conjuntos de $\mathfrak{A}$ pertenece de nuevo a $\mathfrak{A}$.

Decimos entonces que E es un *espacio topológico*; los elementos de E se llaman *puntos* y los conjuntos de $\mathfrak{A}$ se llaman los *conjuntos abiertos* de E. Un conjunto U es una vecindad de x_o sí y sólo si existe un conjunto abierto G tal que $x_o \in G$ y $G \subset U$. Decimos que la colección $\mathfrak{A}$ define una *topología* en E.

Se requiere una condición adicional si deseamos asegurar que si $x_n \to x$ y $x_n \to y$, entonces $x = y$: una tal condición es .

(iv) Si x y y son puntos distintos de E, entonces existen conjuntos abiertos A y B tales que $x \in A$, $y \in B$ y $A \cap B = \phi$.

De un espacio topológico que satisface (iv) se dice que es un *espacio de Hausdorff* o *espacio separado*.

5.4. Sea f una función definida en un espacio topológico E y que toma valores en otro espacio topológico F. La condición para que f sea continua en

E puede expresarse de otra manera ; puede demostrarse que f es continua si y sólo si, para todo conjunto abierto B de F, el conjunto de todos los $x \in E$ tales que $f(x) \in B$, esto es, la *imagen inversa* $f^{-1}(B)$ de B, es un subconjunto abierto de E.

Supongamos ahora que f es una biyección, es decir, que $f(E) = F$ y que $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Hay entonces una función inversa de F en E que satisface las condiciones

$$g[f(x)] = x \quad , \quad (x \in E) \quad ; \quad f[g(y)] = y \quad , \quad (y \in F).$$

Si esta función g es a su vez continua en F, decimos que f es un *homeomorfismo* (*) y que E y F son *homeomorfos* según la aplicación f. Usando nuestra nueva forma de la condición de continuidad, vemos que una biyección f con inversa g es un homeomorfismo sí y sólo si $f(A)$ es abierto siempre que A es abierto y $g(B)$ es abierto siempre que B lo es. En otras palabras, un homeomorfismo lleva conjuntos abiertos en conjuntos abiertos en ambas direcciones ; es sencillamente un isomorfismo entre las estructuras topológicas de E y de F. Vemos así que la noción de isomorfismo, la cual fue introducida en un contexto algebraico, es también relevante en estructuras matemáticas de clase bastante diferente.

Podemos también tener otras clases de isomorfismos. Por ejemplo, sea f una función biyectiva definida en un espacio métrico E y que toma valores en otro espacio métrico F, y supóngase que

$$d[f(x), f(y)] = d(x, y)$$

(*) No debe confundirse con la palabra "homomorfismo" definida en § 4.4.

para todo $x, y \in E$. Llamamos a f una *isometría* y vemos inmediatamente que es, ni más ni menos que, un isomorfismo de las estructuras métricas de E y F.

6. *Interacciones entre álgebra y topología.*

6.1. Muchos de los espacios topológicos más interesantes poseen también una estructura algebraica o tienen alguna estructura algebraica estrechamente relacionada con ellos. Por ejemplo, los números reales forman un grupo bajo la adición, así como también los vectores del espacio euclideano ; a una esfera pueden asociarse las rotaciones alrededor de su centro, las cuales forman un grupo de transformaciones que llevan la esfera en sí misma.

Cuando tanto estructuras topológicas como estructuras algebraicas están presentes, ordinariamente hallamos que las operaciones algebraicas se comportan bien desde el punto de vista topológico. Así, la adición es una operación continua en los números reales ; con más precisión, la función f definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $f(x, y) = x + y$ es continua. En consecuencia, cuando formulamos un sistema de axiomas para una estructura que presenta tanto rasgos algebraicos como topológicos, es común introducir axiomas que garanticen un buen comportamiento en ese sentido. Tomemos como ejemplo los axiomas de grupo topológico ; esto es, un conjunto $\mathcal{G}$ de elementos $x, y, \ldots$ el cual es a la vez un grupo y un espacio topológico y también satisface las condiciones siguientes (escribimos la operación del grupo como multiplicación) :

(i) la función $f(x, y) = xy$, definida en $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ y que toma valores en $\mathcal{G}$ es continua ;

(ii) la función $g(x) = x^{-1}$, donde x^{-1} es el inverso de x , es continua en $\mathcal{G}$.

Cuando se verifican condiciones apropiadas de esta clase decimos que la topología es *compatible* con la estructura algebraica.

Cuando decimos que dos estructuras de esta clase son isomorfas queremos decir que hay una biyección que actúa entre ellas y que es a la vez un isomorfismo algebraico y un isomorfismo topológico (u homeomorfismo). Algunos resultados importantes de la matemática elemental pueden considerarse como afirmaciones de la existencia de tales isomorfismos ; por ejemplo, la teoría de los logaritmos está asociada con el hecho de que el grupo topológico constituido por los números reales positivos con respecto a la multiplicación es isomorfo con el grupo topológico constituido por el conjunto de todos los números reales con respecto a la adición cualquiera de las funciones $y = log_a x$ proporciona un isomorfismo.

6.2. A veces no se nos dàn a la vez una estructura topológica y una algebraica sino únicamente una de ellas y la otra se construye a partir de ésta. Por ejemplo, uno de los problemas centrales de la topología consiste en hallar criterios para determinar si dos espacios topológicos dados son o nó homeomorfos. Se conocen métodos para construir estructuras algebraicas en espacios topológicos de ciertos tipos ; el ejemplo mejor conocido es quizás el de los grupos de homología. Debido a que espacios homeomorfos tienen grupos de homología isomorfos, tenemos por lo menos un criterio negativo : si los grupos de homología construidos a partir de dos espacios dados no son isomorfos entonces los espacios mismos no pueden ser homeomorfos. La última meta que quisiera alcanzarse sería la construcción de un sistema completo de invariantes algebraicos ; y los esfuerzos para lograr esto juegan un amplio papel en el campo de la topología algebraica.

7. Conclusiones.

7. *Conclusiones.*

No he intentado revisar más que unos pocos de los muchos tipos de estructuras matemáticas que han sido creadas ; entre otros merecen por lo menos una mención escueta (i) la teoría de la medida que cubre temas como áreas y volúmenes y la construcción de una noción general de medida para conjuntos de puntos de tipos bastante complejos y que sirve además de base para la teoría de la probabilidad, y (ii) la teoría de las variedades diferenciables que tan rápida y exitosamente se ha desarrollado en los últimos años. También he tomado los enteros y los números reales como hechos sin mostrar cómo también ellos pueden crearse con base en la teoría de conjuntos. Lo que he tratado de hacer es exhibir uno o dos, de entre los más simples e importantes tipos de estructuras, las cuales juegan un papel a través de todo el campo de las matemáticas y tienen una notable influencia aún en niveles bastante elementales.

Se acostumbraba describir la matemática como "la ciencia de las magnitudes discretas y continuas", y aún ahora en diccionarios y enciclopedias aparecen comunmente definiciones similares. En otras palabras, al tema se lo caracterizaba como dedicado a números y configuraciones geométricas. Espero haber logrado mostrar que el alcance de la matemática moderna es demasiado amplio para estar incluido en alguna definición de este tipo. Quizás podría ser descrita hoy como la creación, análisis y formalización de nuevas modalidades abstractas de pensamiento ; y no debe olvidarse que gran parte de este proceso es estimulado por las necesidades de otras ramas de la ciencia y repercute a su vez en el desarrollo de estas.

Se ha sugerido a veces que el rasgo esencial de la matemática moderna es el empleo del método axiomático. Creo que esto es una simplificación exagerada; los sistemas axiomáticos han sido un rasgo familiar de la matemática desde los tiempos de Euclides. Sin embargo, la mayoría de los viejos sistemas axiomáticos tenían una cosa en común : eran intentos para lograr, en forma axiomática, una caracterización completa de una estructura matemática particular, e.g. de la geometría euclideana o de los enteros positivos o de los números reales. En otros términos, se trataba de sistemas *univalentes* ; dos estructuras que satisfiesen un tal sistema eran automáticamente isomorfas y por lo tanto indistinguibles una de la otra desde un punto de vista abstracto. En cambio, la mayoría de los sistemas axiomáticos usados hoy son *multivalentes* ; hay, por ejemplo, una infinidad de estructuras matemáticas distintas que satisfacen los axiomas de grupo y los de espacio topológico. El sistema de axiomas no caracteriza una sola estructura matemática sino un tipo o "categoría" de tales estructuras.

En este punto puede resultar interesante una corta digresión ; se trata de mostrar cómo el concepto de estructura matemática se ajusta dentro de la teoría general de conjuntos. Supóngase que tenemos una estructura de grupo definida sobre un conjunto dado E ; esto equivale a decir que tenemos una función de $E \times E$ en E que satisface ciertas propiedades, especificadas por los axiomas de grupo Dar la función es tanto como dar su gráfica la cual es un subconjunto de $(E \times E) \times E$, es decir, un elemento de $\mathcal{P}[(E \times E) \times E]$. El conjunto de todas las estructuras de grupo que pueden definirse sobre E corresponde por lo tanto a un cierto subconjunto de $\mathcal{P}[(E \times E) \times E]$, esto es, a un cierto elemento de $\mathcal{P}\{\mathcal{P}[(E \times E) \times E]\}$. Esto ilustra un procedimiento general ; siempre que especificamos una estructura matemática de alguna clase sobre un conjunto básico E o sobre un cierto número de conjuntos básicos $E, F, G, \ldots$ estamos especificando un elemento de la jerarquía de conjuntos que puede obtenerse a partir de los conjuntos dados por aplicación repetida de las operaciones del cálculo de conjuntos y de las operaciones adicionales consistentes en formar el conjunto $\mathcal{P}(E)$ de todos los subconjuntos de E y el conjunto $E \times F$ de las parejas ordenadas (x,y) con $x \in E$ y $y \in F$.

¿ Qué conclusión podemos sacar de nuestro sumario de la matemática moderna para la enseñanza del tema en los niveles? Mientras se considere que la matemática comprende únicamente el arte del cálculo y la construcción geométrica, existe la continua tentación de enseñar el tema dando recetas : "Primero usted hace esto y luego hace aquello ". Para algunos alumnos esto puede ser suficiente ; no tienen gusto natural por las matemáticas y todo lo que desean es aprender cómo pasarla con el menor esfuerzo posible. Para otros, sinembargo, y en verdad para una proporción mucho mayor de lo que uno podría sospechar en un principio, tal tipo de enseñanza puede engendrar una perenne aversión por las matemáticas ; mucha gente eventualmente se resiente si se le pide realizar trucos sin entender qué es lo que esta sucediendo y porqué. Todos conocemos a aquellos que, debido a esta falta de comprensión, han llegado a la conclusión de que poseen mentes no matemáticas ; pocos entre ellos se dan cuenta de que no han podido entender los trucos debido a que nunca recibieron una adecuada explicación de los mismos.

Cuando las matemáticas se miran como un estudio de estructura lógica, existe una tentación mucho menor de caer en la enseñanza de recetas ; el objetivo esencial de las matemáticas aparece entonces como el desentrañar una estructura lógica simple en una situación aparentemente complicada y el empleo de las propiedades de esa estructura para lograr un mayor dominio de la situación. Por supuesto, en niveles elementales no se usa el lenguaje general y abstracto de este artículo ; pero en todos los niveles tiene valor una completa comprensión de los procesos de pensamiento involucrado y una conciencia de los tipos de estructuras matematicas a que pertenecen.

En este punto quisiera dar una voz de alerta. Hay entusiastas que abogan porque la totalidad de la enseñanza matemática parta de los tipos de estructuras más generales y lógicamente más simples descendiendo gradualmente hacia las estructuras más complejas y particulares. Para mi esto luce como dar una definición general de un artrópodo a alguien que nunca ha visto una mariposa, una araña o una langosta. Para captar cabalmente el significado de cualquier tipo de estructura matemática debe estarse de antemano en posesión de un repertorio suficientemente grande y variado de especímenes particulares de esa clase ; el aprendizaje es un proceso que va de lo particular a lo general, de lo conocido a lo desconocido La ordenación pedagógicamente correcta de las ideas es a menudo inversa del orden lógico. Sin embargo, tan pronto se han acumulado suficientes especímenes debe estarse en posición de señalar sus semejanzas y mostrar que todos ellos pertenecen a un cierto tipo de estructura existente de tal manera que se aclare su lugar dentro del marco total de la matemática. En seguida pueden buscarse otras estructuras del mismo tipo ; hay un proceso de fecundación mutua por medio del cual el conocimiento de una estructura particular proporciona enfoques fructuosos para otras.

No tengo la intención, y en verdad no tengo ni el conocimiento ni la habilidad, para decir cómo debe aplicarse en la enseñanza de la matemática elemental el tipo de ideas que he tratado de explicar en este artículo ; es esta una tarea que debo dejar a otros. Mi objetivo ha sido más bien exhibir algo de la transformación que, en las dos generaciones anteriores, ha sufrido la estructura de la matemática y lo que los matemáticos piensan al respecto. Solamente ahora esta modalidad de pensamiento está desplegando toda su potencia, aún a niveles de investigación , pero ya ha llegado a ser tan útil y a compenetrarse tánto que debe ser tenida en cuenta en todos los niveles incluyendo los más elementales. Ha llegado la época en que reconsideremos desde el principio cuales matemáticas vamos a enseñar, porqué debe enseñarse una cierta rama en lugar de otra y cómo nuestros métodos de enseñanza deben estar a tono con el nuevo alcance del tema y con las necesidades y capacidades de nuestros alumnos.

St. John's College, Cambridge