Boletín de Matemáticas

Vol. VIII, pp. 101-110

HIPERGRUPOS DE CARACTERES DE GRUPOS FINITOS (*)

RICHARD L. ROTH

Este artículo se divide en tres partes. La primera parte es un repaso rápido de las ideas y la terminología de la teoría de caracteres de grupos finitos. En la segunda parte se explica lo que es un hipergrupo y se presenta la teoría básica. En la tercera parte se da una idea de las aplicaciones del concepto de hipergrupo a la teoría de caracteres.

1. Sea G un grupo finito y sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Definición : Una *representación* de G en V es un homomorfismo T de G en el grupo de aplicaciones regulares (no singulares) de V. Si V no tiene subespacios invariantes por el conjunto de aplicaciones $\{T(g) : g \in G\}$ se dice que la representación T es *irreducible*. En general, tenemos el

Teorema 1. *$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$; V_i invariante para $i = 1, 2, \ldots, s$; es decir, que se puede escribir V como una suma directa de subespacios invariantes V_i donde cada V_i da una representación irreducible T_i de G. (De modo que las representaciones irreducibles forman los bloques fundamentales de la teoría).*

(*) Este artículo es el texto de la conferencia dictada por el autor en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas. N. del E.

Definición : A cada representación T le asociamos una función χ de G a $\mathbb{C}$ llamada *el carácter de* T : $\chi(g)$ = Traza de $T(g)$ (tomando una base de V, se obtiene una matriz para $T(g)$, se calcula luego la traza de $T(g)$, es decir, la suma de los elementos en el diagonal). Definimos : *dimensión de* χ = dimensión de T = dimensión de V. Si T es irreducible, decimos que χ lo es también. En caso contrario, si T se descompone como en el Teorema 1, entonces $\chi = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_s$, donde ψ_i es el carácter de T_i (decimos entonces que ψ_i es una *componente de* ψ).

Usaremos los caracteres en lugar de las representaciones ; el carácter determina la representación salvo equivalencias.

Ejemplo : Sea V un espacio de dimensión 1 y sea $T_1(g)$ = identidad, para todo $g \in G$. La representación T_1 se llama la *representación unidad*. Sea ψ_1 el carácter de T_1 : χ_1 es el *carácter unidad* [$\chi_1(g) = 1$, para todo $g \in G$].

Teorema 2. G *tiene un número finito de caracteres irreducibles.*

Consideremos ahora el conjunto de caracteres irreducibles $\hat{G} = \{\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_r\}$. Subsiste entonces el siguiente teorema :

Teorema 3. *Si* G *es un grupo abeliano finito entonces los caracteres irreducibles de* G *son todos de dimensión uno.* $\hat{G}$ *forma un grupo llamado "el dual", bajo la multiplicación* $(\chi_1 \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ *y además* $G \cong \hat{G}$.

En este caso $\hat{G}$ tiene muchas propiedades interesantes, y la teoría es semejante a la teoría de duales para espacios vectoriales. La teoría de $\hat{G}$ para G finito y abeliano fue desarrollada en el siglo XIX como parte de la teoría de los números. Frobenius empezó la teoría de caracteres de los grupos finitos, a fines del siglo XIX, para generalizar lo anterior. Si G no es abeliano, $\hat{G}$ no es un grupo.

Este artículo se dedica a explorar un poco más la estructura de $\hat{G}$.

Sean ψ_1 un carácter de G, con representación U_1, en el espacio V_1, y ψ_2 un carácter de G, con representación U_2 en el espacio V_2. Entonces existe una representación $U_1 \times U_2$ de G en $V_1 \times V_2 : (U_1 \times U_2)(g) = U_1(g) \times U_2(g)$. [En la terminología de las matrices esto se llama el producto de Kronecker]. Y el carácter correspondiente de $U_1 \times U_2$ es $\psi_1 \times \psi_2$. Así el *producto de caracteres es un carácter* (pero el producto de caracteres irreducibles no es siempre irreducible).

Si $\chi_i, \chi_j \in \hat{G}$, entonces $\chi_i \chi_j = \sum_{k=1}^{r} n_k \chi_k$, donde los n_k son enteros no negativos, porque si T_k corresponde a $\chi_i \chi_j$ y es la suma directa de representaciones irreducibles (véase Teorema 1), agrupándose las representaciones equivalentes.

Un teorema interesante y clásico referente al producto de caracteres es el siguiente :

Teorema 4 (Burnside) *Si χ corresponde a una representación uno a uno, entonces todo carácter χ_i irreducible aparece como componente de alguna potencia χ^n de χ.*

Para estudiar los componentes de un carácter es útil definir el producto escalar. Sean χ, ψ caracteres

$$\langle \chi , \psi \rangle = \frac{1}{o(G)} \sum_{g \in G} \chi(g) \cdot \overline{\psi(g)} .$$

Teorema 5. $\langle \chi_i , \chi_j \rangle = \delta_{ij}$. *Si* $\chi = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_i$ *entonces* $\langle \chi, \chi_i \rangle = n_i$.

[Es decir, que $\langle \chi, \chi_i \rangle > 0$ si y sólo si, χ_i es componente de χ].

Definición : Si χ es un carácter, existe otro carácter $\overline{\chi} : \overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$, para todo $g \in G$, donde designa $\overline{\chi(g)}$ el conjugado complejo de $\chi(g)$. $\overline{\chi}$ se llama el *carácter conjugado* .

Lema 6 : $\langle \chi\overline{\lambda}, \psi \rangle = \langle \chi, \lambda\psi \rangle$ (La demostración es inmediata).

Corolario : χ_1 *es una componente de* $\chi\overline{\chi}$ *donde* χ *puede ser cualquier carácter.*

Demostración : $\langle \chi\overline{\chi}, \chi_1 \rangle = \langle \chi, \overline{\overline{\chi}}\chi_1 \rangle = \langle \chi, \chi \rangle = \sum n_i^2 > 0$, si $\chi = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_i$.

Una referencia para el material de esta primera parte sería : *Representaciones de Grupos Finitos*, por Richard Roth, Monografía 8, de la Revista Colombiana de Matemáticas (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá , D. E.), 1969 .

2. Ahora, en la segunda parte, veremos qué son los hipergrupos.

En la década de los años treinta, varios matemáticos empezaron el estudio axiomático de las estructuras algebraicas que se parecen a los grupos pero en las cuales el producto de dos elementos es un subconjunto en lugar de ser un solo elemento. Varios sistemas de axiomas se usaron, imitando los varios modos de escribir los axiomas de grupo. Estas estructuras se llamaron *hipergrupos (o multigrupos)*. [Una buena referencia es : "The theory of multigroups", by Drescher and Ore, Amer. J. Math. 60(1938), 705-733. Una aplicación de esta teoría general fué la de dar una estructura para el conjunto de coclases G/H donde G es grupo y H es subgrupo que no es normal ; pero el concepto más restringido de hipergrupo canónico que veremos pronto no sirve para esto .] Los hipergrupos se estudiaron mucho en las décadas de los años treinta y cuarenta, pero luego permanecieron casi olvidados, posiblemente porque la teoría general resultó inelegante ya que se necesitaban demasiadas condiciones y definiciones especiales en los teoremas.

En 1958, Helgason utilizó la idea de hipergrupo para estudiar representaciones de grupos compactos y esta idea fue desarrollada por Iltis (1968), encontrándose, en forma disfrazada, en el libro "Abstract Harmonic Analysis, II" de Hewitt y Ross (1971). Ninguna de estas últimas personas se peocupó por la teoría axiomática de los años treinta.

Al autor le interesó desarrollar estas ideas para grupos finitos (de hecho un caso más especial que los grupos compactos) y encontró que si se escoge un sistema fuerte de axiomas para hipergrupos, se consigue un sistema en el cual es fácil enunciar y demostrar los teoremas básicos, además de que es un sistema que sirve para los ejemplos que se quería estudiar. El autor llamó a estas estructuras "hipergrupos reversibles abelianos". Pero después encontró unos artículos en los "Comptes Rendus" (de la Academia Francesa) escritos por un matemático griego llamado Mittas (1969), donde escogía un sistema de axiomas equivalente y usaba el nombre de "hipergrupo canónico". Aquí se adoptará el nombre usado por él. El motivo original de las investigaciones de Mittas no tenía nada que ver con grupos sino que estaba relacionado con una teoría de valuaciones de cuerpos debida a Krasner.

Definición : Sea H un conjunto no vacío. A cada par (a,b) de elementos de H le asignamos un subconjunto no vacío de H escrito ab. Es decir, $ab \subseteq H$, $ab \neq \phi$ *(el hiperproducto)*. Ahora si $S \subseteq H$, $T \subseteq H$ y $a \in H$, entonces $aS = \cup \{ as \mid s \in S \}$. y $ST = \cup \{ st \mid s \in S,\ t \in T \}$. Decimos entonces H es hipergrupo canónico si se cumplen los axiomas siguientes :

1. $ab = ba$ para todo $a,b \in H$ *(conmutatividad)*.

2. $(ab)c = a(bc)$ para todo $a, b, c \in H$ *(asociatividad)*

3. Existe $e \in H$ tal que $ea = \{a\}$ todo $a \in H$

4. Para todo $a \in H$ existe un elemento $a^{-1} \in H$ *(el inverso)* con la propiedad siguiente :

   Para $b, c \in H$, si $c \in ab$ entonces $b \in a^{-1}c$ (El axioma de reversibilidad)

Lema 7 : i) e *es único*

ii) $e \in a\,a^{-1}$;

iii) a^{-1} *es único*

Ejemplos : 1) Cualquier grupo abeliano.

2) Sea $\mathbb{R}^+$ los números reales no negativos, definimos el hiperproducto $x * y = \{x + y ; | x - y |\}$. "$e$" $= 0$ y "x^{-1}" $= x$. Nótese que $x * x^{-1} = \{2x, 0\}$.

3) Sea H cualquier hipergrupo canónico (incluso puede ser cualquier grupo abeliano, por ejemplo). Si G es un grupo de automorfismos, se pueden formar las órbitas de transitividad bajo la acción de G. El producto de órbitas es unión de órbitas lo que ofrece un hipergrupo y resulta entonces que tenemos otro hipergrupo canónico. [Para un ejemplo de esta construcción véase K_G en la tercera parte de la conferencia] .

Hay otros ejemplos interesantes pero pasamos a los dos ejemplos que me interesan más.

4) Sea G un grupo ; $\overline{G}$ será el conjunto de clases conjugadas. Si $C_i, C_j \in \overline{G}$, entonces se puede demostrar que $C_i C_j$ es unión de clases y así tenemos un hiperproducto $C_i * C_j$ = las clases contenidas en $C_i C_j$. De modo que $\overline{G}$ es hipergrupo canónico, con identidad $\{e\}$. El inverso de una clase C_i es la clase de los inversos de los

elementos de C_i.

5. Sean G un grupo finito, $\hat{G} = \{ \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r \}$ el conjunto de caracteres irreducibles, con χ_1 el carácter unidad. Como vimos antes $\chi_i \chi_j = \Sigma n_k \chi_k$. Sea $\chi_i * \chi_j = \{ \chi_k \in \hat{G} : n_k > 0 \}$ el conjunto de los caracteres irreducibles distintos que son componentes de $\chi_i \cdot \chi_j$. Este es el hiperproducto. Se verifican los axiomas :

$(\chi_i * \chi_j) * \chi_h = \chi_i * (\chi_j * \chi_h) =$ el conjunto de componentes irreducibles de $\chi_i \chi_j \chi_h$; como $\chi_i \chi_j = \chi_j \chi_i$, entonces $\chi_i * \chi_j = \chi_j * \chi_i$; y finalmente, $\chi_1 = e$ porque $\chi_1 \chi_i = \chi_i$.

Examinando el axioma 4 se ve que $\overline{\chi}_i$ es el inverso de χ_i. Si $\chi_k \in \chi_i * \chi_j$ entonces χ_k es una componente de $\chi_i \chi_j$, de modo que $\langle \chi_k , \chi_i \chi_j \rangle > 0$. De ahí , por el lema 6 , $\langle \chi_k \overline{\chi}_i , \chi_j \rangle > 0$ y χ_j es una componente de $\chi_k \overline{\chi}_i$. Es decir, que

$$\chi_j \in \chi_k * \overline{\chi}_i = \overline{\chi}_i * \chi_k$$

y se cumple la reversibilidad.

Regresamos a la teoría abstracta de hipergrupos canónicos. Lo bello de los hipergrupos canónicos es que uno puede construir siempre hipergrupos cocientes.

Definición : Un *subhipergrupo* del hipergrupo canónico H es un subconjunto N tal que $e \in N$ y N es hipergrupo (canónico) con el mismo hiperproducto (es cerrado, etc.) .

Teorema 8 : *Si N es subhipergrupo de H entonces las coclases hN forman una partición de H, escrita H/N Si definimos el hiperproducto $(hN)*(h_1N) =$ el conjunto de coclases contenidas en $hNh_1 = h\, h_1 N$, entonces H/N es* *un un hipergrupo canónico* .

3 En esta tercera parte investigamos un poco más el uso del concepto de hipergrupo en el estudio de los caracteres de un grupo finito G. Como ya hemos visto, $\hat{G}$ es hipergrupo. Debe notarse lo siguiente : si $\chi \in \widehat{G/K}$ con $K \lhd G$ entonces $\chi \in \hat{G}$, de modo que $\widehat{G/K} \subseteq \hat{G}$ y $\widehat{G/K}$ es subhipergrupo de $\hat{G}$.

Teorema 9 (Helgason, Iltis, etc.) *Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de subgrupos normales* K *de* G *y los subhipergrupos de* $\hat{G}$ *dada por* $K \leftrightarrow \widehat{G/K}$. (Helgason e Ilts habían demostrado este teorema en la situación más general de grupos compactos usando varios teoremas de análisis; en el caso especial de grupos finitos se necesita principalmente el teorema de Burnside (Teorema 4)) .

En el caso que G sea abeliano se cumple el elegante teorema $\hat{G}/\widehat{G/K} \cong \hat{K}$.

Veamos ahora la generalización al caso en que G no es abeliano. Sean $K \lhd G$, $\psi \in \hat{K}$, $g \in G$.

Definición : $\psi^g(k) = \psi(g^{-1}kg)$ para todo $k \in K$. Se puede demostrar que $\psi^g \in \hat{K}$. Así los elementos de G actúan sobre $\hat{K}$ por medio de la conjugación y obtenemos una partición de $\hat{K}$ en G órbitas. Esta partición la indico por $\hat{K}_G$.

Teorema 10 (Clifford, 1938) . *Si* $\chi \in \hat{G}$ *y* ψ *es una componente irreducible de* $\chi_{/K}$ *(la restricción de* χ *a* K*) entonces* $\chi_{/K} = m \sum \psi^g$ *, sumando sobre los "conjugados"* ψ^g *distintos de* ψ : m *es un entero positivo* .

Así a cada $\chi \in \hat{G}$ le hemos asociado un elemento de $\hat{K}_G : \chi \to \{\psi^g\}_{g \in G}$.

Lema 11 : *Si* $\chi \to \{\psi^g\}$ *, el conjunto de caracteres de* $\hat{G}$ *que corresponden también a* $\{\psi^g\}$ *será precisamente la coclase* $\chi * (\widehat{G/K})$.

Así tenemos una correspondencia biunívoca entre $\hat{G}/\widehat{G/K}$ y $\hat{K}_G$.

Teorema 12. *El producto de las G-órbitas de $\hat{K}$ es unión de G-órbitas. Con este hiperproducto, $\hat{K}_G$ se convierte en un hipergrupo canónico, que es isomorfo a $\hat{G}/\widehat{G/K}$ conforme a la correspondencia ya mencionada.*

[Una correspondencia biunívoca τ entre hipergrupos es un isomorfismo si $c \in ab \iff \tau(c) \in \tau(a) \cdot \tau(b)$].

Veremos ahora un pequeño teorema que es una aplicación del teorema de Burnside. Primero debemos recordar que si G es un grupo y K subconjunto no vacío entonces K será un subgrupo de K si : 1. $x, y \in K \Rightarrow xy \in K$; 2. 2. $x \in K \Rightarrow x^{-1} \in K$. Pero si G es un grupo *finito* solamente hay que verificar 1. para que K sea un subgrupo.

Lema 13. *Si H es hipergrupo canónico entonces un subconjunto no vacío S es subhipergrupo si :*

$$1.: \ x, y \in S \Rightarrow xy \subset S \ ; \qquad 2.: \ x \in S \Rightarrow x^{-1} \in S$$

Ahora, aunque H sea finito, la condición 1. para S no es suficiente para garantizar que S sea subhipergrupo. Pero tenemos lo siguiente :

Teorema 14: *Si G es grupo finito y $M \subseteq \hat{G}$. $M \neq \phi$ entonces M es subhipergrupo si, y sólo si, $\psi . \chi \in M \Rightarrow \chi * \psi \subseteq M$.*

Demostración : Es realmente una sencilla aplicación del teorema de Burnside (Teorema 4). Hay que ver que la clausura implica la existencia de los inversos. Sea $\chi \in M$. Sea K el núcleo de una representación T correspondiente a χ. T es una representación uno a uno de G/K. Así el teorema 4 dice que todo carácter de G/K aparece como componente de alguna potencia χ^m de χ. Incluso $\bar{\chi}$ es componente de χ^m y así pertenece al hiperproducto

$$\chi * \chi * \cdots * \chi \subseteq M$$

Ahora bien, para los grupos finitos es interesante estudiar y comparar los dos hipergrupos correspondientes $\hat{G}$ y $\bar{G}$. Considero que el par $\hat{G}$ y $\bar{G}$ de hipergrupos son "duales".

Definición : Un hipergrupo canónico se llama un *ultragrupo* si existe una cadena

$$\{e\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_r = H$$

tal que N_i / N_{i-1} sea un grupo para todo i.

Teorema 15 : *Sea G un grupo finito. $\hat{G}$ es ultragrupo $\Longleftrightarrow$ G es nilpotente $\Longleftrightarrow$ $\bar{G}$ es ultragrupo.*

(La última parte es un teorema de Dietzman). Para más teoremas y también más detalles con respecto a las partes 2 y 3 de la conferencia véase el artículo mío "Character and Conjugacy" Class Hypergroups of a Finite Group" que saldrá en "Annali di Matematica Pura ed Aplicata" en 1975.

Department of Mathematics
University of Colorado
Boulder, Co. 80302, U.S.A.