Boletín de Matemáticas
Vol. VIII , pp. 89 - 94

LA TOPOLOGIA EN LA LOGICA : EL TEOREMA DE COMPACIDAD (*)

RAFAEL MARIÑO

Queremos primero presentar el Teorema de Compacidad de la Lógica Proposicional. Paralelamente introduciremos algunas de las ideas elementales de la Lógica. Posteriormente demostraremos el teorema usando herramientas de Topología. Deseamos, de esta manera, ilustrar la unicidad de la matemática.

El Teorema

En una de sus formas equivalentes, y enunciándolo informalmente, el teorema dice que "lo que se puede demostrar se puede demostrar en un número finito de pasos".

Procederemos ahora a introducir terminología y notación para poder enunciar el teorema formalmente.

Llamaremos *alfabeto* al conjunto de símbolos $\{$ (,) , $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, A_1 , A_2 , ... $\}$. Llamaremos *expresión* o *fórmula* a cualquier sucesión finita de elementos del alfabeto. Ejemplos :

$\langle A_7 , A_3 , (, \neg , \rightarrow \rangle$

(*) Este artículo es el texto de la conferencia dictada por el autor en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas. N. *del* E.

$\langle \wedge , (,),), A_4 \rangle$

$\langle (, (, A_1 , \vee , A_2 ,), \wedge , A_3) \rangle$

$\langle (, (, A_1 , \rightarrow , A_2 ,), \leftrightarrow , (, (, \neg , A_2 ,), \rightarrow ; (, \neg , A_1),),) \rangle$

En lugar de escribir estas cuatro fórmulas en la forma anterior escribiremos más simplemente :

$$A_7 \, A_3 \, (\neg \rightarrow$$

$$(\,) \,) \, A_4$$

$$((A_1 \vee A_2) \wedge A_3)$$

$$((A_1 \rightarrow A_2) \leftrightarrow ((\neg A_2) \rightarrow (\neg A_1)))$$

Similarmente escribiremos cualquier otra fórmula.

Como el lector seguramente lo ha comprendido, las *variables* $A_1, A_2, \ldots$ representan *proposiciones* : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ representan las cinco *conectivas lógicas* : "no", "y", "o", "entonces", "si y solamente si" y los símbolos "(,)" son símbolos de agrupación.

También habrá observado el lector que de nuestras cuatro fórmulas las dos primeras no tienen sentido (considerando las interpretaciones dadas a los símbolos en el párrafo anterior). Las otras dos son ejemplos de lo que llamaremos *fórmulas bien formadas* que abreviaremos *fbf* y que procederemos ahora a definir.

Una fórmula es una *fbf* si es de una de las tres formas siguientes :

(i) Es una de las variables $A_1, A_2, \ldots$

(ii) Es de la forma $(\neg \alpha)$ en donde α es una *fbf*.

(iii) Es de la forma $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ o $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ en donde α y β son *fbfs*.

La idea ahora es que si a cada una de las variables de una *fbf* le asignamos uno de los símbolos "V" o "F" (para "verdadero" y "falso") o 1 o 0 si se prefiere, a la *fbf* le corresponde uno de estos valores de acuerdo con la interpretación común de los conectivos lógicos. Así, con la asignación $A_1 \mapsto F$, $A_2 \mapsto F$, $A_3 \to V$, la *fbf* $((A_1 \vee A_2) \wedge A_3)$ tiene valor F y la fórmula $((A_1 \to A_2) \leftrightarrow ((\neg A_2) \to (\neg A_1)))$ tiene valor V. A propósito, esta última fórmula tiene valor V con cualquier asignación que le demos a las variables y por esta razón se llama una *tautología*.

De un conjunto Σ de *fbfs* se dice que es *verificable* si existe una asignación para todas las variables que aparezcan con la cual cada elemento de Σ tiene valor V.

Así, $\{A_1, (A_2 \to (\neg A_1))\}$ es verificable porque $A_1 \mapsto V$, $A_2 \mapsto F$ es una asignación que hace a ambas *fbfs* verdaderas. En cambio, $\{A_1, (\neg A_1)\}$ no es verificable.

Ahora podemos enunciar el

Teorema de Compacidad. *Un conjunto de fbfs es verificable si y sólo si todo subconjunto finito de él es verificable*.

Antes de demostrar el teorema, veamos que él implica que "lo que se puede demostrar se puede demostrar en un número finito de pasos", esto, naturalmente, dentro de las restricciones de la lógica proposicional en que estamos actuando.

Diremos que un conjunto Σ de *fbfs* *implica tautológicamente* a una *fbf* τ, y escribimos $\Sigma \models \tau$, si toda asignación (de valores V o F para cada variable que intervenga) que satisfaga cada elemento de Σ, satisface a τ. Ejemplo: $\{A_1 (A_1 \to A_2)\} \models A_2$. Ahora podemos demostrar el siguiente

Corolario : Si $\Sigma \models \tau$, existe un subconjunto finito Σ_o de Σ tal que $\Sigma_o \models \tau$.

Demostración : Si para todo subconjunto finito Σ_o de Σ, $\Sigma_o \not\models \tau$, entonces $\Sigma_o \cup \{ \neg \tau \}$ es verificable para todo subconjunto finito Σ_o de Σ y por el teorema de compacidad $\Sigma \cup \{ \neg \tau \}$ es verificable y $\Sigma \not\models \tau$ ■

El lector puede demostrar que este corolario implica a su vez el teorema de compacidad.

Demostración del teorema. Considérese el espacio $\{ V, F \}$ (ó $\{ 1, 0 \}$ si se quiere) con la topología discreta. Este espacio es compacto. Por el teorema de Tychonoff el espacio producto $\{ V, F \}^{\aleph_0}$ es compacto. Sea B el conjunto de las variables : $B = \{ A_1, A_2, \ldots \}$. Los espacios $\{ V, F \}^{\aleph_0}$ y $\{ V, F \}^B$ son homeomorfos y por lo tanto $\{ V, F \}^B$ (el conjunto de todas las asignaciones V o F a las variables) es compacto. Para cada asignación v y cada *fbf* α, $v(\alpha)$ representa el valor V o F que v le asigna a F (como se explica en el párrafo siguiente a la definición de *fbf*). Para cada *fbf* α definimos $V_\alpha = \{ v \in \{ V, F \}^B \mid v(\alpha) = V \}$. Nuestro objetivo es demostrar que si Σ es un conjunto de *fbfs* tal que todo subconjunto finito $\Sigma_o \subseteq \Sigma$ es verificable, o sea $\bigcap_{\alpha \in \Sigma_o} V_\alpha \neq \phi$, entonces $\bigcap_{\alpha \in \Sigma} V_\alpha \neq \phi$. Para esto demostraremos que $\{ V_\alpha \mid \alpha \in \Sigma \}$ es una colección de cerrados con la propiedad de la intersección finita (en nuestro espacio compacto $\{ V, F \}^B$). Recuerde el lector el siguiente teorema de Topología General :

Teorema : *Un espacio topológico es compacto sii todo conjunto de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.*

Ya aclaramos que $\{ V_\alpha \mid \alpha \in \Sigma \}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Nos queda por demostrar que cada V_α es cerrado.

Digamos que la *fbf* α contiene n variables, a saber, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$, y que existen k asignaciones (entre las 2^n posibles) que asignen el valor v a α. La tabla de verdad de α, incluyendo solamente las lineas con V para α tiene la siguiente apariencia :

A_{i_1}	A_{i_2}	$\ldots$	A_{i_n}	α
X_{11}	X_{12}	$\ldots$	X_{1n}	V
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_{k1}	X_{k2}	$\ldots$	X_{kn}	V

donde $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{kn}$ son valores V o F.

Ahora, por cada una de estas k líneas, existen en realidad un número infinito de asignaciones en $\{V, F\}^B$ que coinciden con las respectivas asignaciones para las n variables que sí aparecen en α y toma valores cualesquiera en las otras variables.

Así se tiene que

$$pr_{i_1}^{-1}[X_{11}] \cap \ldots \cap pr_{i_n}^{-1}[X_{1n}]$$

es el conjunto de todas las asignaciones que coinciden con los valores de la primera línea para las n variables. En total

$$V_\alpha = \bigcup_{h=1}^{k} \left(\bigcap_{s=1}^{n} pr_{i_s}^{-1} [X_{hs}] \right)$$

Como cada $pr_{i_s}^{-1}[X_{hs}]$ es cerrado (por ser $\{X_{hs}\}$ cerrado) V_α es una unión finita de intersecciones de cerrados y por lo tanto cerrado.

Este trabajo está insinuado en :

Enderton Herbert, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, New York and London.