

## ALGUNOS TEMAS DE TEORIA DE GRAFICOS<sup>(\*)</sup>

GILMA DE VILLAMARIN

En estas páginas se intenta dar una visión sobre lo que es y estudia la rama de las Matemáticas llamada Teoría de Gráficos.

Los temas seleccionados para ello han sido ~~escogidos~~ con la intención de dar una idea del tipo de razonamiento que puede llevarse a cabo en esta teoría, y luego mostrar algunos de los problemas que pueden resolverse como aplicación de ella.

La Teoría de Gráficos tiene fecha exacta de nacimiento, cosa que no sucede en otras ramas de Matemáticas. En efecto, el primer artículo sobre la Teoría de Gráficos fue escrito por el famoso matemático suizo Leonard Euler en 1736. En sus comienzos la Teoría de Gráficos pareció poco importante debido a que en gran parte se limitaba a resolver juegos de entretenimiento y acertijos. Es por eso que a pesar de su temprano principio, su desarrollo como rama de la Matemática es reciente.

Actualmente la Teoría de Gráficos ha tenido gran ímpetu, debido a la simplicidad y elegancia de sus razonamientos, los cuales proporcionan a su vez poder -

---

(\*) Este artículo es, esencialmente, el texto de la conferencia informativa sobre Teoría de Gráficos, dictada por la autora en el IV Coloquio Colombiano de Matemáticas. N. del E.

sas herramientas en la resolución de una gran variedad de problemas de aplicación de esta teoría .

El primer problema que se considerará es precisamente el tratado en el primer artículo sobre gráficos escrito por Euler. En este artículo Euler presentó el conocido "Problema de los siete puentes de Königsberg"

La ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) en Prusia Oriental está situada sobre las riberas y sobre dos de las islas del río Pregel. Las distintas regiones de la ciudad (marcadas en la Figura 1 con las letras A, B, C, D) se hallaban entonces conectadas por medio de 7 puentes, como se indica en la Figura 1 .

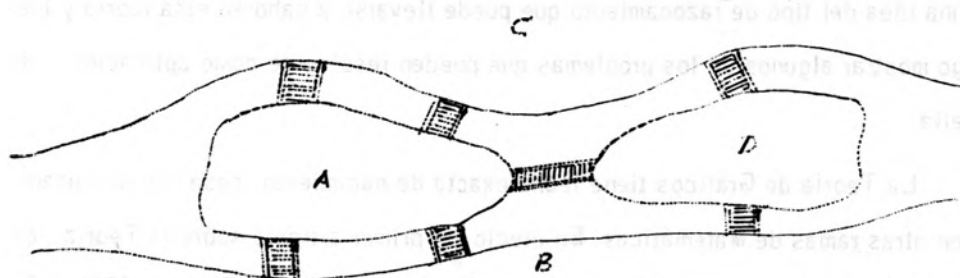


Figura 1

Los habitantes de la ciudad paseaban los domingos por los alrededores del lugar, y fué así como llegaron a plantearse el siguiente problema :

¿ Podrían planear un paseo de tal manera que, partiendo de casa se pudiera volver allí después de haber cruzado cada puente una sola vez ?

Por ejemplo, los habitantes de la región A , intentaron el siguiente paseo (Figura 2) :

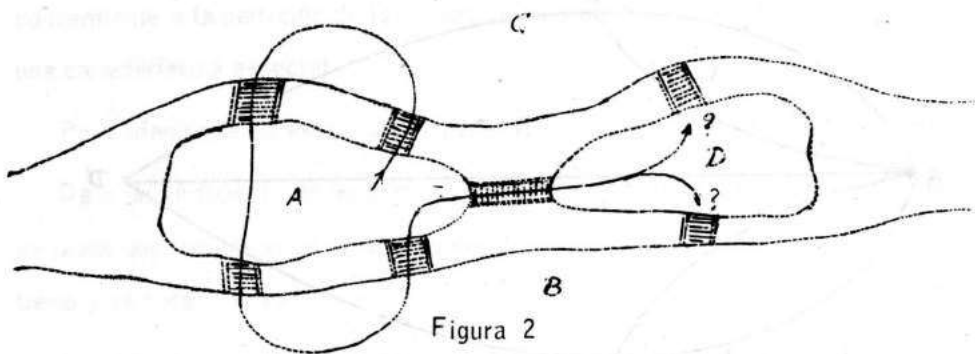


Figura 2

Pero al llegar a la región *D*, fracasaron en su intento, pues en cualquiera de las dos posibilidades a seguir para volver a la región *A*, es necesario repetir un puente. Es así como los habitantes de la ciudad fallaron en todos sus intentos de encontrar un paseo que cumpliera las condiciones requeridas.

Con el fin de resolver el problema se pensó en ilustrarlo con el siguiente diagrama geométrico. Las diferentes regiones de la ciudad se representan por puntos y dos de estas regiones se conectan por medio de una curva continua, cuando las regiones correspondientes estén unidas por un puente (Figura 3) :

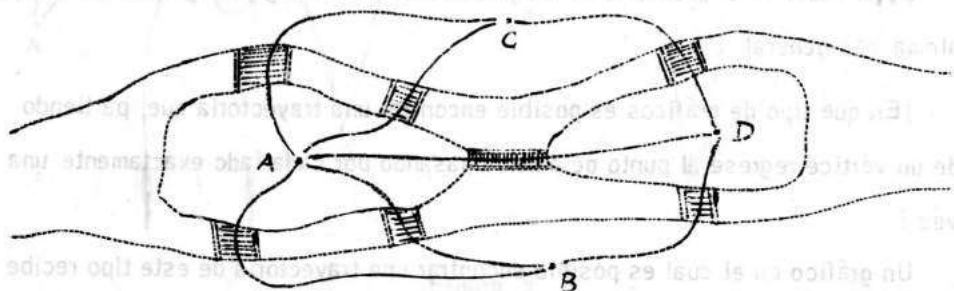


Figura 3

O sea, que el problema planteado puede estudiarse más fácilmente sobre la siguiente figura, la cual constituye lo que se llama un "gráfico geométrico" en el plano (Figura 4) :

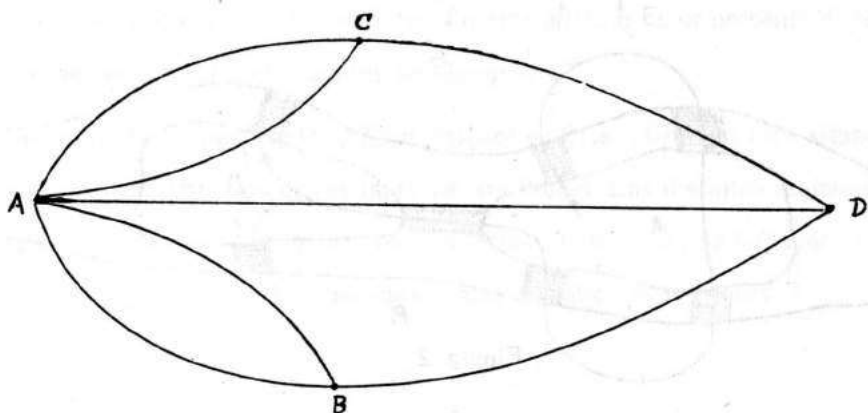


Figura 4

Un gráfico geométrico está constituido por un conjunto de puntos del espacio euclídeo de dimensión  $n$  ( $E^n$ ) llamados *vértices* y por un conjunto de curvas simples que unen pares de vértices, llamados *lados* del gráfico y los cuales no se interceptan en puntos distintos de los vértices. El gráfico de los puentes de Königsberg está constituido por cuatro vértices y siete lados.

Euler resolvió el problema de los puentes de Königsberg y luego planteó un problema más general :

¿En qué tipo de gráficos es posible encontrar una trayectoria que, partiendo de un vértice regrese al punto de partida pasando por cada lado exactamente una vez ?

Un gráfico en el cual es posible encontrar una trayectoria de este tipo recibe

el nombre de *gráfico de Euler*.

Actualmente, como luego veremos, los gráficos de Euler son apenas un caso particular de un tema más general de la Teoría de Gráficos y es precisamente el concerniente a la partición de los lados de un gráfico en conjuntos que gozan de una característica especial.

Para adentrarse en este tema es necesario introducir antes algunos conceptos.

Dado un vértice  $V$  de un gráfico, se llama *grado local* del vértice, al número de lados que inciden en el vértice, o sea al número de lados que lo tienen como extremo y se nota  $\rho(V)$

Un vértice  $V$  se dice *aislado* si  $\rho(V) = 0$ , o sea, un vértice aislado es aquel en el cual no inciden lados.

Los vértices de un gráfico se clasifican en *vértices pares* y *vértices impares*, según que su grado local, sea par o impar.

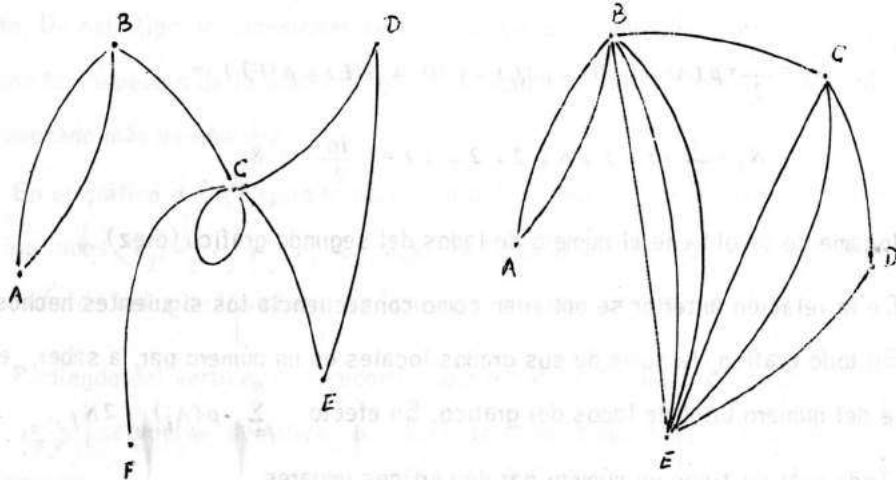


Figura 5

En el primero de los gráficos de la Figura 5 se tienen los siguientes grados locales :  $\rho(A) = 2$  ;  $\rho(B) = 3$  ;  $\rho(C) = 6$  ;  $\rho(D) = 2$  ;  $\rho(E) = 2$  ;  $\rho(F) = 1$  .

El segundo gráfico tiene todos sus vértices pares .

El número de lados de un gráfico puede conocerse a través del grado local de sus vértices. En efecto, si se efectúa la suma de los grados locales, se está contando cada lado dos veces, una vez por cada vértice que lo tenga como punto extremo. Por lo tanto esta suma será dos veces el número total de lados del gráfico.

Si se nota por  $N_l$  el número total de lados de un gráfico  $G$  con  $n$  vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se tiene entonces

$$2N_l = \rho(A_1) + \rho(A_2) + \dots + \rho(A_n)$$

O sea,

$$N_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho(A_i)$$

En el primero de los dos gráficos anteriores, el número de lados es entonces :

$$\begin{aligned} N_l &= \frac{1}{2} (\rho(A) + \rho(B) + \rho(C) + \rho(D) + \rho(E) + \rho(F)) = \\ &= N_l = \frac{1}{2} (2 + 3 + 6 + 2 + 2 + 1) = \frac{16}{2} = 8 . \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene el número de lados del segundo gráfico (diez) .

De la relación anterior se obtienen como consecuencia los siguientes hechos:

1) En todo gráfico, la suma de sus grados locales es un número par, a saber, el doble del número total de lados del gráfico. En efecto  $\sum_{i=1}^n \rho(A_i) = 2N_l$  .

2) Todo gráfico tiene un número par de vértices impares .

En efecto, llamando  $A_1, \dots, A_r$  los vértices pares del gráfico  $G$  y  $B_1, B_2, \dots, B_s$

los vértices impares del mismo gráfico, entonces la suma total de grados locales será igual a la suma de grados locales de los vértices impares más la suma de los grados locales de los vértices pares :

$$\sum_{i=1}^r \rho(A_i) + \sum_{j=1}^s \rho(B_j) = 2 N_l$$

La suma de los grados locales de los vértices pares es un número par por ser suma de números pares, luego la suma de los grados locales de vértices impares es también un número par

$$\sum_{i=1}^s \rho(B_j) = 2m \text{ para algún entero } m$$

Pero la suma de un número impar de números impares es impar. Se concluye que el número  $s$  de vértices impares no puede ser impar. Luego este número es par.

En un gráfico  $G$ , se puede partir de un vértice y atravesando una sucesión de lados en forma sucesiva retornar al vértice de partida o llegar a otro vértice distinto. De este tipo de sucesiones de lados son especialmente importantes en casi todos los aspectos de la teoría de gráficos, aquellas en las cuales ningún lado es atravesado más de una vez .

En el gráfico de la Figura 6, partiendo del vértice  $A$ , y recorriendo sin repetir los lados  $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$  se llega al vértice  $B$ . En este caso la sucesión de lados se llama una *cadena*, que une los vértices  $A$  y  $B$ .

Partiendo del vértice  $B$  y recorriendo sin repetir los lados  $\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \rangle$  se vuelve al vértice  $B$ . En este caso la sucesión de lados se llama un *circuito*.

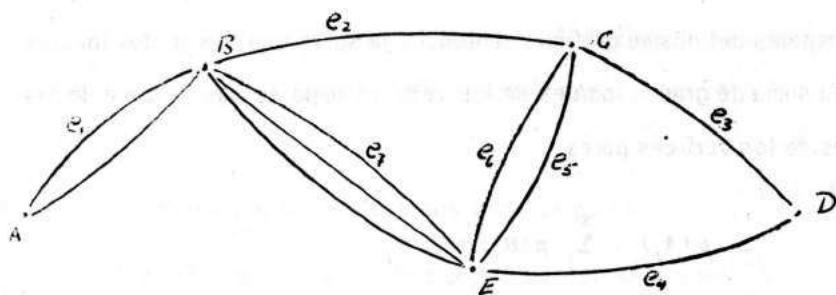


Figura 6

Si en un gráfico  $G$  todo par de vértices pueden ser unidos al menos por una cadena, se dice que  $G$  es *conexo*. En caso contrario, se dice que  $G$  es *disconexo*. Por ejemplo, el gráfico de la figura 7 es *conexo*.

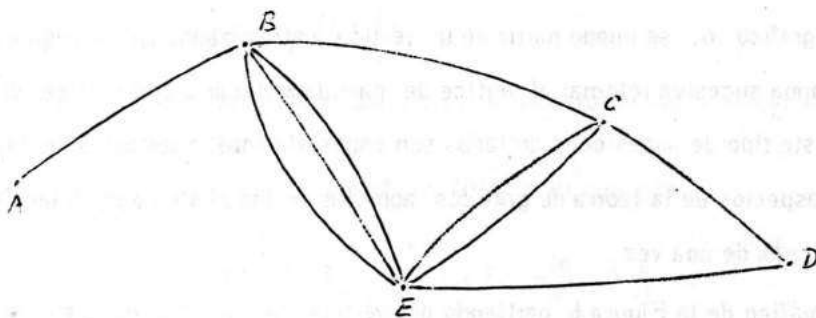


Figura 7

Un ejemplo de gráfico desconexo es el gráfico que aparece en la Figura 8



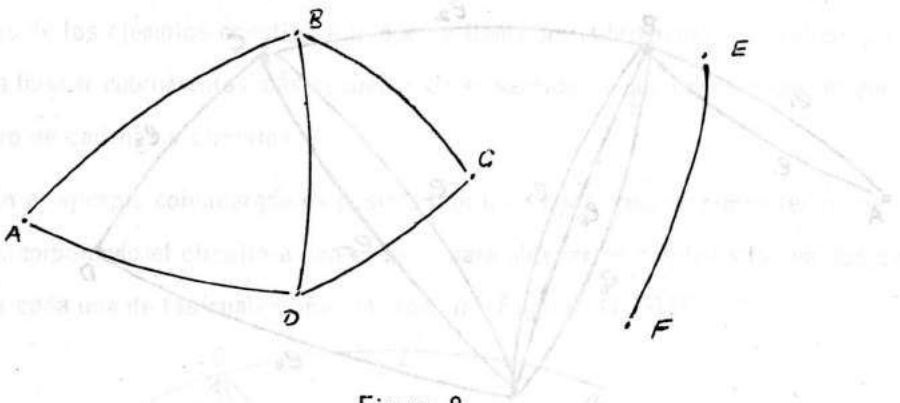


Figura 8

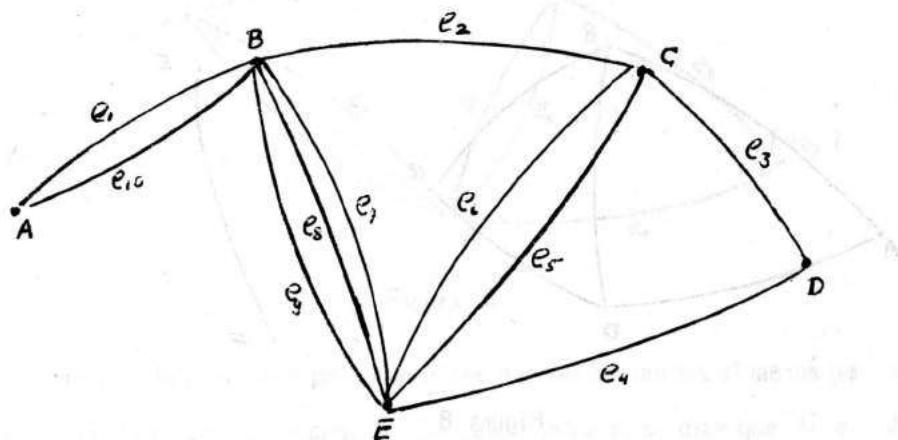
En efecto, el vértice  $A$ , por ejemplo, es posible unirlo con  $B$ ,  $C$  y  $D$  por medio de una cadena pero no es posible unirlo con los vértices  $E$  y  $F$  por medio de una cadena.

La parte del gráfico cuyos vértices son los que se pueden unir con un vértice  $A$  por medio de una cadena (y el vértice  $A$ ), constituyen lo que se llama una *componente conexa* del gráfico. O sea que si un gráfico no es *conexo* se divide en *componentes conexas* cuyos vértices no se pueden unir por cadenas. El gráfico del ejemplo es un gráfico desconexo con dos componentes conexas. Lo anterior permite reducir el estudio a gráficos conexos pues, en caso contrario, se están estudiando las propiedades de las componentes conexas.

Vamos a considerar el problema de particionar el conjunto de lados de un gráfico en subconjuntos disyuntos cada uno de los cuales sea una cadena o un circuito.

Por ejemplo en el gráfico de la Figura 7 podemos obtener dos particiones del conjunto de sus lados, cada una constituida por dos cadenas y un circuito. Estas

particiones se ilustran en las Figuras 9 y 10 respectivamente.



$$\langle e_1, e_8, e_5, e_3 \rangle$$

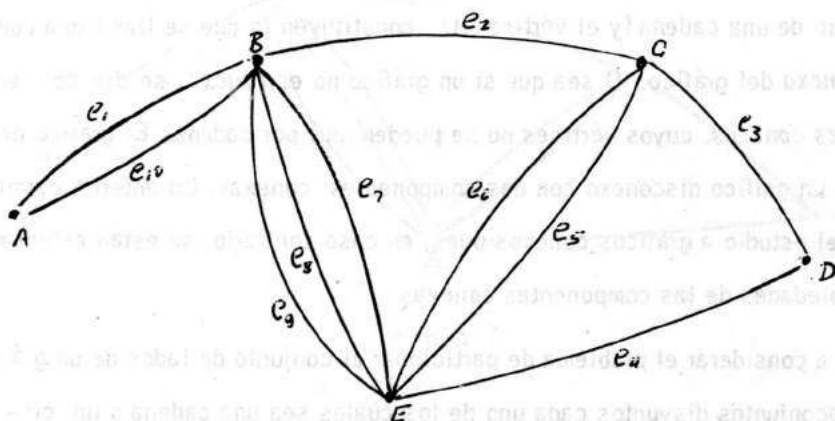
(cadena)

$$\langle e_{10}, e_9, e_4 \rangle, \langle e_2, e_6, e_7 \rangle$$

(cadena)

(circuito)

Figura 9



$$\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

(cadena)

$$\langle e_{10}, e_7, e_6, e_5, e_4 \rangle, \langle e_9, e_8 \rangle$$

(cadena)

(circuito)

Figura 10

Una partición del conjunto de los lados de un gráfico, en cadenas o circuitos como las de los ejemplos constituye lo que se llama un *cubrimiento* del gráfico. Se desea buscar cubrimientos más pequeños en el sentido de que consten del menor número de cadenas y circuitos.

En el ejemplo considerado es posible hallar en cada caso un cubrimiento menor, incorporando el circuito a una cadena, para obtener un cubrimiento con dos cadenas cada una de las cuales une *A* con *D* (Figuras 11 y 12).

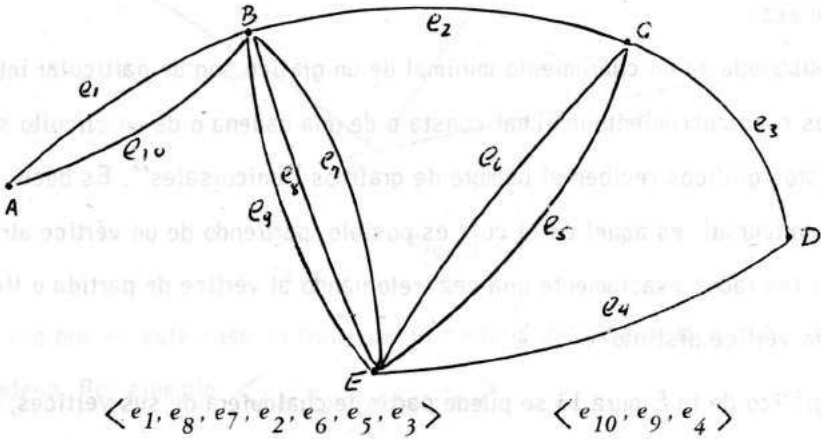


Figura 11

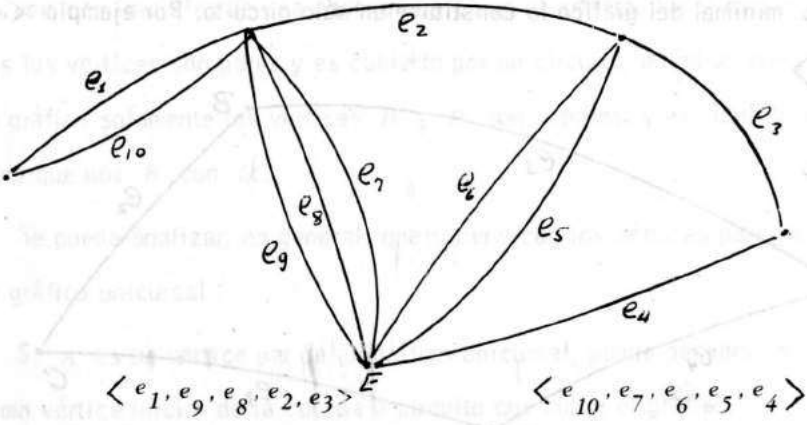


Figura 12

Puesto que se están considerando gráficos finitos, es decir, gráficos en los cuales el conjunto de vértices y el conjunto de lados son conjuntos finitos, es posible hallar en cada gráfico un cubrimiento *minimal*, en el sentido de que conste del menor número posible de cadenas y circuitos.

¿Cuál sería en el ejemplo dado un cubrimiento minimal ?

Puesto que para hallar un cubrimiento minimal de un gráfico desconexo, basta hallarlo para cada una de sus componentes conexas, se considerarán solamente gráficos conexos.

En la búsqueda de un cubrimiento minimal de un gráfico son de particular interés aquellos cuyo cubrimiento minimal consta o de una cadena o de un circuito solamente. Estos gráficos reciben el nombre de gráficos "unicursales". Es decir : un *gráfico unicursal* es aquel en el cual es posible, partiendo de un vértice, atravesar todos los lados exactamente una vez (retornando al vértice de partida o llegando a otro vértice distinto).

En el gráfico de la Figura 13 se puede partir de cualquiera de sus vértices, y retornar a él atravesando cada lado del gráfico exactamente una vez, o sea, que un cubrimiento minimal del gráfico lo constituye un sólo circuito. Por ejemplo :  $\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$

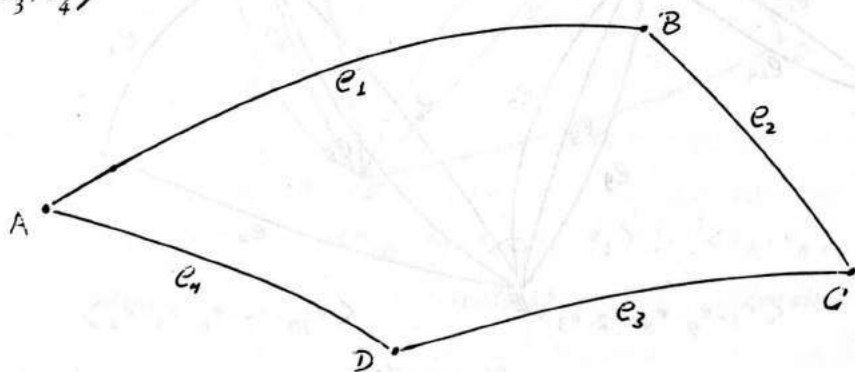


Figura 13

En el gráfico de la Figura 14 se puede partir del vértice  $B$ , atravesar cada lado del gráfico una sola vez, y llegar al vértice  $D$ .

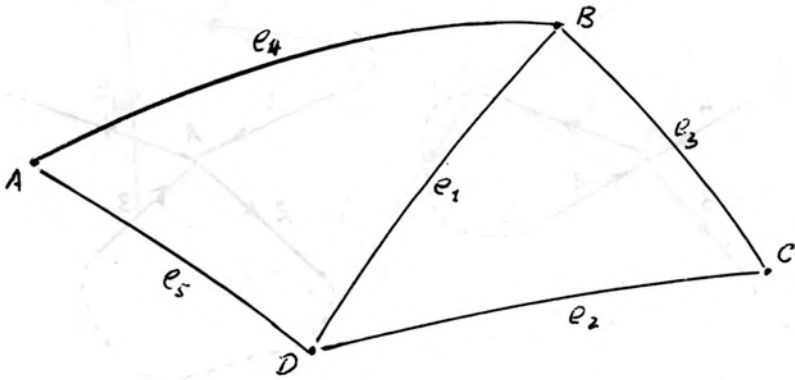


Figura 14

O sea que en este caso un cubrimiento minimal del gráfico lo constituye una sola cadena. Por ejemplo  $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$ .

Se puede observar que solamente los vértices  $B$  y  $D$  del gráfico sirven como vértices iniciales de una cadena que cubra el gráfico. En el primer gráfico todos los vértices son pares y es cubierto por un circuito, mientras que en el segundo gráfico solamente los vértices  $B$  y  $D$  son impares, y es cubierto por una cadena que une  $B$  con  $D$ .

Se puede analizar, en general, qué sucede con los vértices pares e impares en un gráfico unicursal:

Si  $A$  es un vértice par de un gráfico unicursal, puede pensarse en tomar  $A$  como vértice inicial de la cadena o circuito que cubre el gráfico.

Si  $A$  es vértice impar, entonces cada vez que se salga de  $A$  atravesando

un lado, es necesario regresar a él, pues el número de lados que se han atravesado con cada partida es un número impar. O sea que  $A$  será el vértice inicial y final de un circuito.

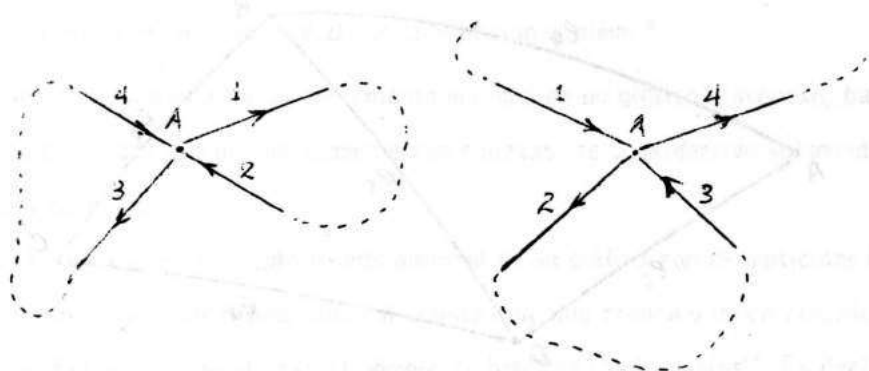


Figura 15

Si el vértice  $A$  no es inicial, o sea si llega a él de otro vértice, entonces es necesario salir de él nuevamente pues el número de lados que se han atravesado con cada llegada a  $A$  es un número impar.

Esto significa que un vértice de tránsito (que no es inicial o final de una cadena o circuito) es un vértice par. En efecto, si  $A$  es un vértice impar al cual se llega de otro vértice, entonces es necesario volver a él, pues el número de lados que se han atravesado con cada partida es un número par. Luego un vértice impar no puede ser de tránsito, pero sí un vértice final de una cadena.

Si se toma como vértice inicial un vértice  $A$  impar, entonces cada vez que se vuelva a  $A$ , es necesario salir de él nuevamente, pues el número de lados que se han atravesado con cada llegada a  $A$  es un número par.

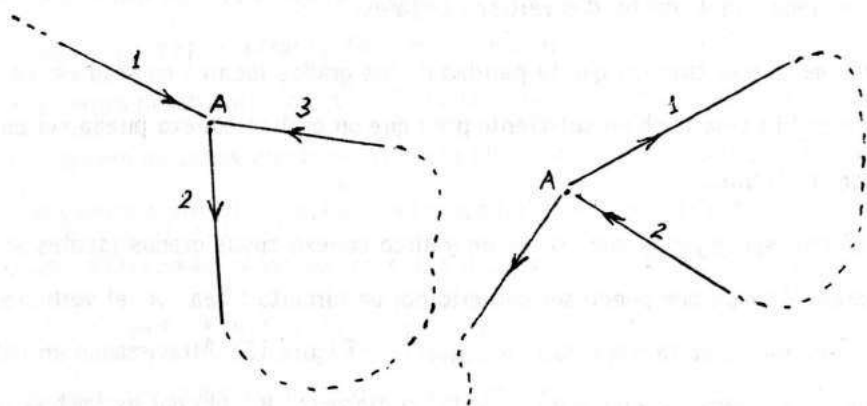


Figura 16

O sea, que  $A$  será el vértice inicial de una cadena la cual debe terminar en otro vértice impar.

Los anteriores razonamientos se pueden resumir en las siguientes conclusiones:

- 1) Si un gráfico conexo es cubierto por un circuito, entonces todos sus vértices son pares.
- 2) Si un gráfico conexo es cubierto por una cadena, entonces tiene exactamente dos vértices impares.

Con lo discutido hasta ahora, se ha demostrado que el gráfico de los puentes de Königsberg no puede ser cubierto por un circuito, puesto que en tal caso sus vértices deberán ser pares, condición ésta que no se satisface en el gráfico en cuestión. Ni siquiera es posible encontrar un paseo que recorra todas las partes de la ciudad pasando por los puentes una sola vez sin que se exija volver al punto de

partida, pues tampoco el gráfico puede cubrirse por una cadena, debido a que el gráfico no tiene exactamente dos vértices impares.

Puede mostrarse también que la paridad de los grados locales no sólo es condición necesaria sino también suficiente para que un gráfico conexo pueda ser cubierto por un circuito.

En efecto, supongamos que  $G$  es un gráfico conexo cuyos grados locales son todos pares. Veamos que puede ser cubierto por un circuito: Sea  $A$  el vértice escogido como inicial de la trayectoria a seguir (ver Figura 17). Atravesando un lado incidente a  $A$  llegamos a un segundo vértice, digamos  $B$ , el cual es también de grado par, y por lo tanto habrá un segundo lado incidente a  $B$ , el cual nos permite salir para continuar la trayectoria. Este proceso termina necesariamente en el

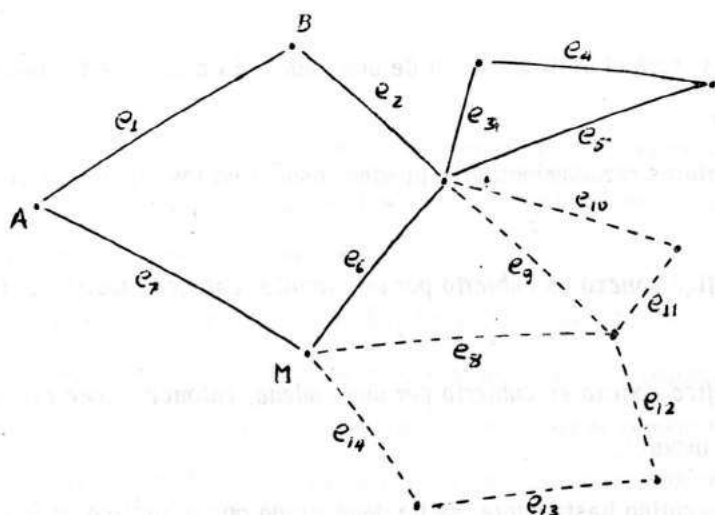


Figura 17

punto  $A$ , pues en cualquier otro vértice que se llegue, siempre habrá una salida. La sucesión de lados recorridos constituye un circuito. En la Figura  $\langle e_1, e_2, e_3, \dots \rangle$



$e_4, e_5, e_6, e_7 >$  .

Si este circuito incluye todos los lados del gráfico se habrá cubierto el gráfico con un circuito. En caso contrario, debe existir por lo menos un vértice  $M$  en el cual inciden lados no atravesados aún. El número de estos lados debe ser par puesto que el número de lados atravesados hasta el momento es también par. Tomando a  $M$  como vértice inicial y siguiendo el procedimiento anterior formamos un nuevo circuito, atravesando lados que no estén incluidos en el primer circuito. En la Figura :  $\langle e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14} \rangle$  .

Si todos los lados del gráfico han sido recorridos ahora, entonces la reunión de estos dos circuitos, constituye un circuito que cubre todo el gráfico .

En caso contrario podemos repetir el procedimiento anterior hasta obtener un circuito que cubra al gráfico.

De esta manera han quedado caracterizados los gráficos de Euler, o sea los gráficos conexos, que pueden ser cubiertos por un circuito, como aquellos gráficos conexos que tienen todos sus vértices pares .

Pero, ¿qué se puede decir al respecto de los gráficos que tienen vértices impares, o sea, de los gráficos cuyos vértices no son todos pares ? Recordando que un gráfico tiene un número par, digamos  $2n$ , de vértices impares, el siguiente criterio determina los cubrimientos minimales para gráficos con vértices impares :  
*Si un gráfico conexo, tiene  $2n$  ( $n \geq 1$ ) vértices impares, entonces todo cubrimiento minimal del gráfico consiste en  $n$  cadenas, las cuales unen dos vértices de grado impar.*

En efecto supongamos que los  $2n$  vértices de grado impar son los vértices

$$A_1, A_2, \dots, A_n \quad \text{y} \quad B_1, B_2, \dots, B_n .$$

Al agregar al gráfico los lados  $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_n, B_n)$  todos los vértices del gráfico resultan pares y por lo tanto existe un circuito que lo cubre.

Al quitar los  $n$  lados agregados, el circuito se rompe en  $n$  cadenas que cubren todos los lados del gráfico original y cuyos vértices inicial y final son impares.

Por ejemplo, el gráfico de los puentes de Königsberg en un gráfico con 4 vértices impares. Veamos cómo puede ser cubierto por 2 cadenas:

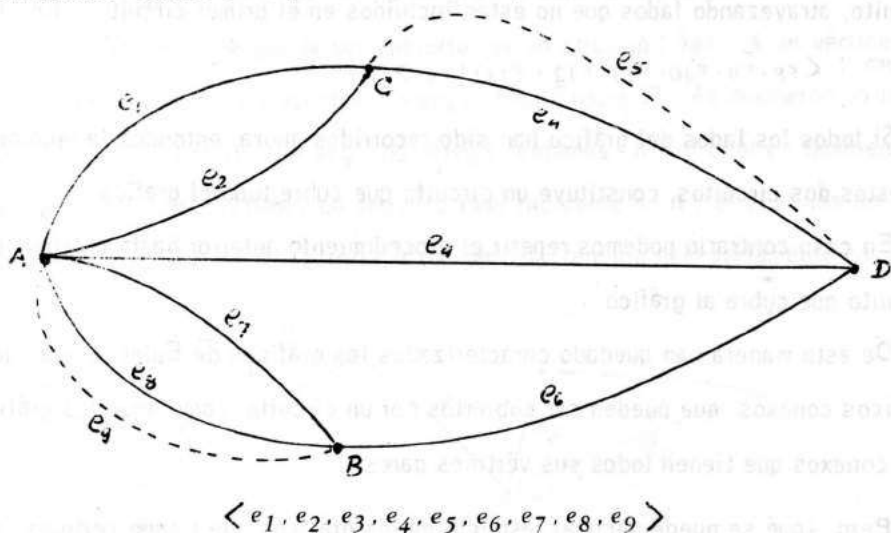


Figura 18

Completamos el gráfico añadiendo dos lados  $e_5$  y  $e_9$ . El nuevo gráfico (Figura 18) puede ser cubierto por un circuito a saber:  $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9 \rangle$

Volviendo al gráfico original, el circuito queda subdividido en dos cadenas:

$\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$  y  $\langle e_6, e_7, e_8 \rangle$  las cuales unen los vértices A y C, D y B respectivamente (Figura 19).

Aplicando lo discutido anteriormente pueden, por ejemplo, encontrarse cubri-

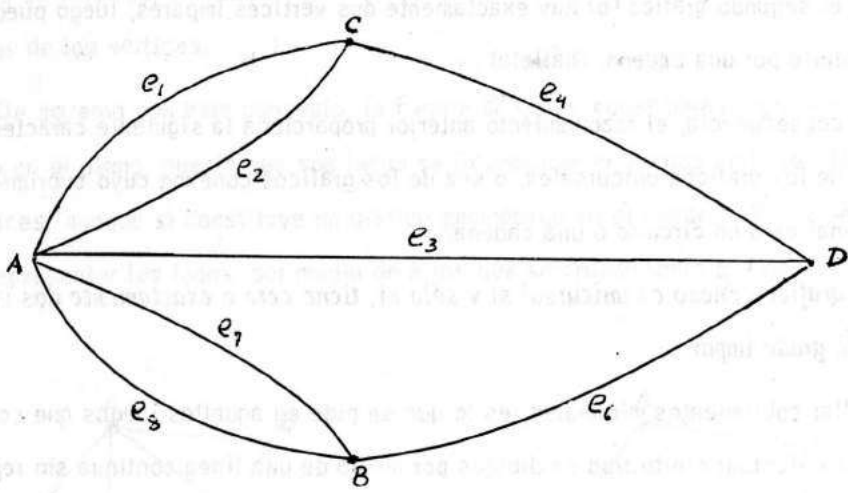


Figura 19

mientos minimales para los gráficos de la Figura 20 .

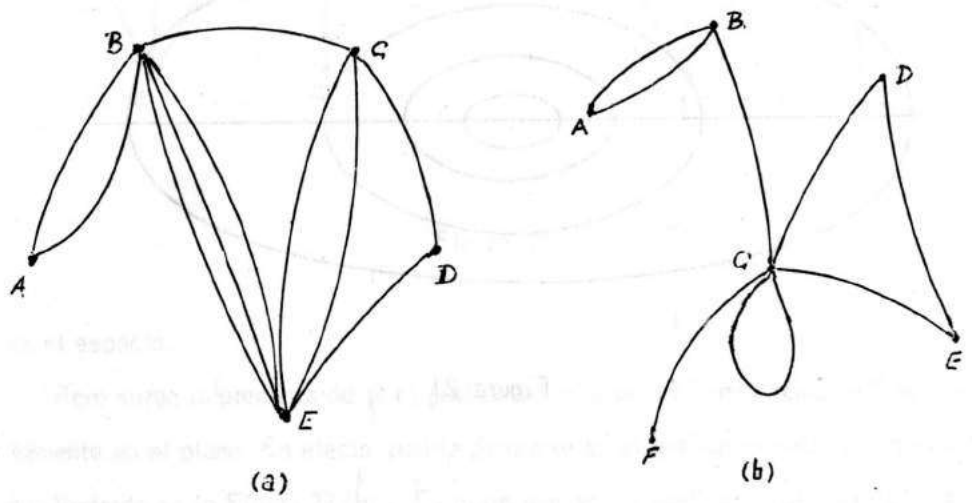


Figura 20

En el primer gráfico (a) todos los vértices son pares y por tanto puede ser cubierto por un circuito (hállelo).

En el segundo gráfico (b) hay exactamente dos vértices impares, luego puede ser cubierto por una cadena, (hállela) .

En consecuencia, el razonamiento anterior proporciona la siguiente caracterización de los gráficos unicursales, o sea de los gráficos conexos cuyo cubrimiento minimal es o un circuito o una cadena.

*Un gráfico conexo es unicursal si y sólo si, tiene cero o exactamente dos vértices de grado impar.*

Hallar cubrimientos minimales, es lo que se pide en aquellos juegos que consisten en efectuar cierto tipo de dibujos por medio de una línea continua sin repeticiones y sin levantar el lápiz del papel Ver, por ejemplo, la Figura 21 .

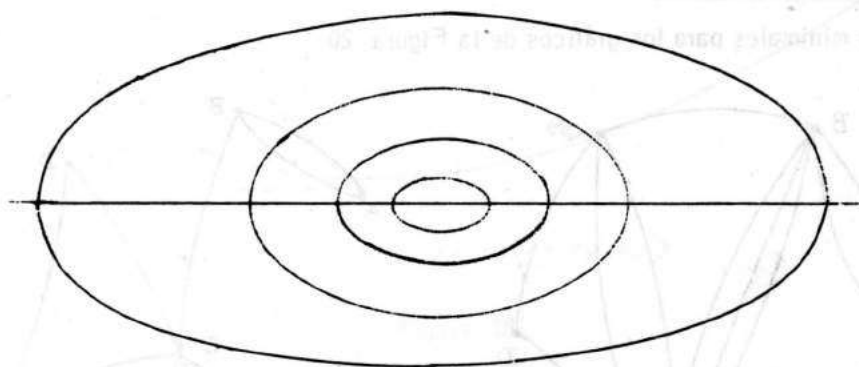


Figura 21

Se ha dicho que un *gráfico geométrico* en el plano está constituido por un conjunto de puntos, llamados *vértices* , un conjunto de curvas simples que unen

pares de vértices, llamados *lados* y los cuales no se interceptan en puntos distintos de los vértices.

De acuerdo con este concepto, la Figura 22 (a) no constituye un gráfico geométrico en el plano, puesto que sus lados se interceptan en puntos distintos de los vértices, aunque sí constituye un gráfico geométrico en el espacio. Basta pensar en representar los lados por medio de hilos que se cruzan (pero que no se cortan)

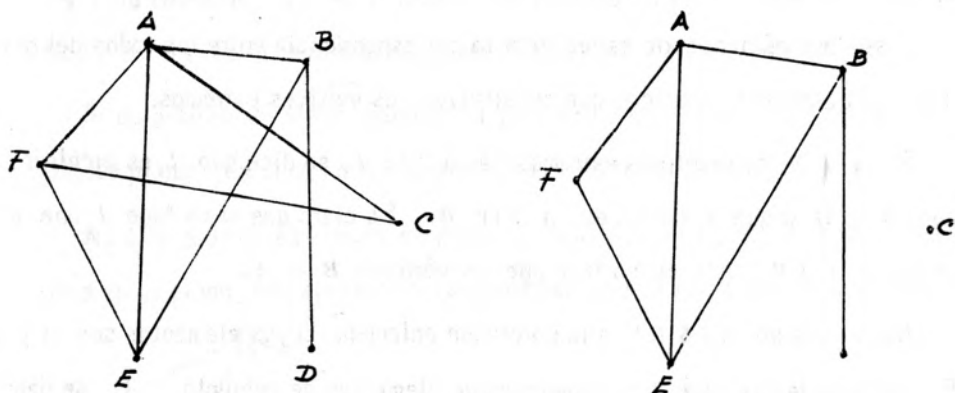


Figura 22

en el espacio.

Pero surge la pregunta de si el gráfico anterior puede "representarse" adecuadamente en el plano. En efecto, podría pensarse en el gráfico geométrico en el plano ilustrado en la Figura 22 (b). Es claro que ambos gráficos contienen la misma información sobre la situación que representan. En efecto, ambos gráficos tienen el mismo número de lados, el mismo número de vértices, y además la conexión

de los vértices por medio de los lados del gráfico es igual, es decir, que si dos vértices en el primer gráfico están conectados por un lado, también lo están en el segundo gráfico y recíprocamente.

La anterior situación nos muestra la necesidad de definir *gráfico* en un sentido abstracto y del cual los gráficos geométricos son apenas una *representación*.

La estructura más importante en un *gráfico abstracto* la constituye la forma como están conectados los vértices del gráfico por los lados del mismo.

O sea que es necesario especificar la correspondencia entre los lados del gráfico y las parejas de vértices que constituyen sus vértices extremos.

Si  $A$  y  $B$  son vértices extremos de un lado  $l$ , se dice que  $l$  es *incidente* con  $A$  y  $B$  o que  $l$  incide en  $A$  y en  $B$ . Es claro que si un lado  $l$  une los vértices  $A$  y  $B$ , ese mismo lado une los vértices  $B$  y  $A$ .

Notaremos por  $(A \& B)$  a la pareja *no ordenada* cuyos elementos son  $A$  y  $B$ . El conjunto de las parejas no ordenadas de elementos de conjunto  $V$  se denota  $V \& V$ .

Un *gráfico abstracto*, o simplemente, un *gráfico* está constituido por un conjunto  $V$  ( $V \neq \phi$ ), un conjunto  $E$  (disyunto de  $V$ ), y una función  $\Phi$ , llamada (función de) *incidencia* de  $E$  en  $V \& V$  tal que :

$$\begin{array}{ccc} \Phi : E & \longrightarrow & V \& V \\ l & \longmapsto & \Phi(l) = (A \& B) \end{array}$$

A los elementos de  $V$  se les llama *vértices* y a los de  $E$  se les llama *lados*,

Al dar una definición de gráfico abstracto es necesario precisar cuándo dos gráficos geométricos representan *el mismo* gráfico (en abstracto). Esto nos conduce

al concepto de gráficos geométricos "isomorfos". Dos gráficos  $G_1$  y  $G_2$  son *isomorfos* si tienen el mismo número de vértices, el mismo número de lados y si siempre que dos vértices de  $G_1$  estén conectados por medio de un lado deben existir dos vértices correspondientes en  $G_2$ , conectados por medio de un lado y recíprocamente. Más estrictamente,  $G_1$  es *isomorfo* a  $G_2$ , si existen correspondencias biunívocas entre sus lados y entre sus vértices respectivamente, que preserven la incidencia. En el ejemplo dado los gráficos  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos, pero mientras  $G_1$  es un gráfico del espacio  $G_2$  es un gráfico del plano. Se dice que  $G_2$  es la realización geométrica del gráfico  $G_1$  en el plano.

Si un gráfico  $G$  tiene realización geométrica en el plano se dice que es un *gráfico planar*: en caso contrario se dice que es *no planar*.

No todo gráfico es planar, es decir, no todo gráfico tiene realización geométrica en el plano. Por ejemplo, para el gráfico de la Figura 23 (a) no es posible

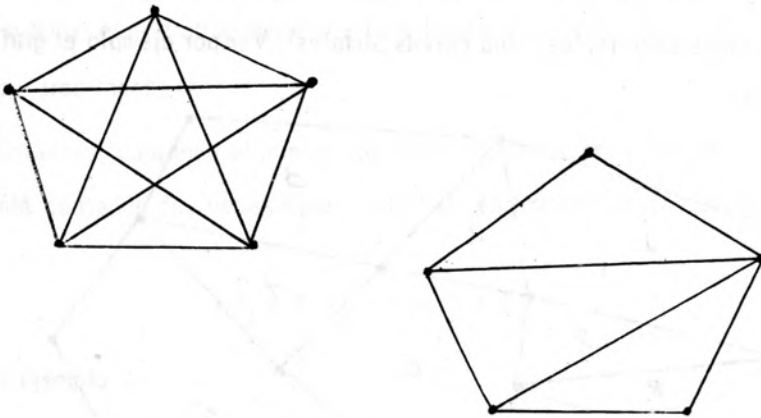


Figura 23

construir un gráfico en el plano isomorfo con él. Puede intentarse, por ejemplo, dibujar los lados como se indica en la Figura 23 (b).

Pero no es posible unir  $E$  con  $C$  con un lado que no interseque a los otros lados en puntos diferentes de los vértices.

Una caracterización de tales gráficos la dió Kuratowski en un importante teorema, el cual queda fuera del alcance de esta conferencia.

En contraste con la anterior situación se cumple el siguiente hecho, el cual tampoco se demostrará :

*Todo gráfico geométrico tiene realización en el espacio euclideo de dimensión tres.*

Un gráfico planar se llama *poligonal*, si sus lados forman un conjunto de regiones poligonales adyacentes (al hablar aquí de regiones poligonales, no se exige que sus lados sean rectos, sino curvas simples). Ver por ejemplo el gráfico de la Figura 24 :

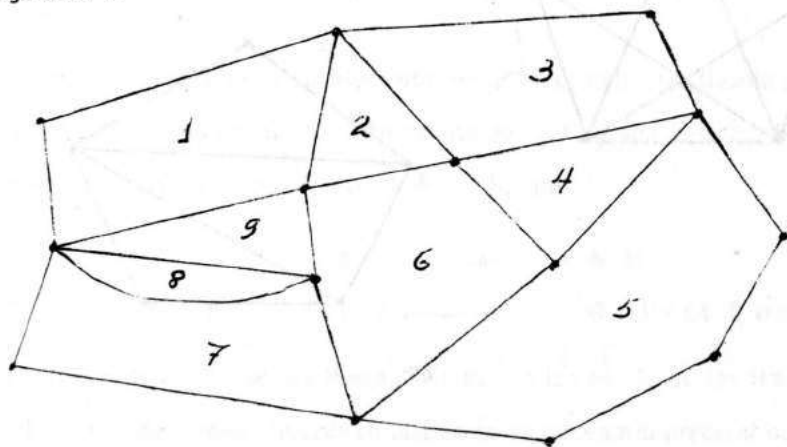


Figura 24



A las regiones poligonales se las llama *caras* del gráfico, y a la parte del plano exterior a los lados que rodean todas las caras del gráfico se la llama la *cara infinita* del gráfico .

Un buen ejemplo de gráfico poligonal lo constituye el mapa político de una nación el cual muestra la división del territorio en departamentos o estados.

Se ha observado antes que el número total de lados de un gráfico se puede obtener conociendo los grados locales de los vértices. En el caso de gráficos poligonales existe otra manera de contar los lados. A saber :

Sea  $\varphi_k$  el número de caras limitadas por  $k$  lados. En el ejemplo de la Figura 24 :

$$\varphi_2 = 1 ; \varphi_3 = 3 ; \varphi_4 = 3 ; \varphi_5 = 1 ; \varphi_6 = 1 ; \varphi_7 = 0 ; \varphi_8 = 0 ; \varphi_9 = 0 ; \varphi_{10} = 1 .$$

Es decir, este gráfico tiene una cara limitada por dos lados, tres caras limitadas por tres lados, etc. .

Entonces, contando el número de lados por cada cara y notando que cada lado se está contando dos veces (pues cada lado es frontera de dos caras) se tiene que :

$$2 N_l = 2 \varphi_2 + 3 \varphi_3 + 4 \varphi_4 + \dots$$

En el ejemplo :

$$2 N_l = 2 + 9 + 12 + 5 + 6 + 10 = 44$$

Luego

$$N_l = 22$$

Euler demostró que para poliedros se verifica la siguiente relación entre su

número de caras, lados y vértices :

$$N_v + N_c - N_l = 2$$

Veamos que la misma verifica también para gráficos poligonales (efectuando inducción sobre el número de caras ) :

Si el número de caras es  $N_c = 2$  , el gráfico será un polígono de  $n$  lados como el de la Figura 25 :

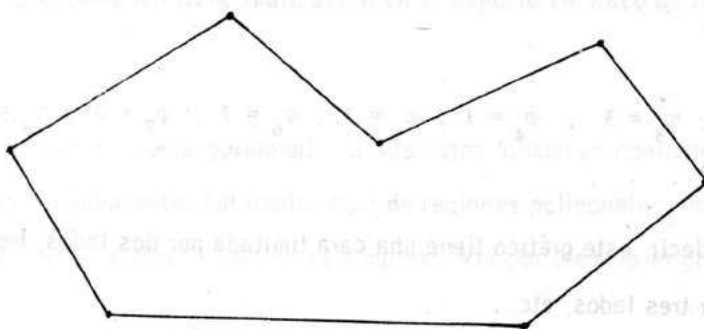


Figura 25

En este caso  $N_v = n = N_l$ ;  $N_c = 2$  y se cumple

$$N_v + N_c - N_l = 2$$

Supongamos que la anterior relación se cumple para un gráfico de  $N_c$  caras veamos que se cumple para un gráfico de  $N_c + 1$  caras. Un tal gráfico se puede obtener a partir de uno con  $N_c$  caras agregando una cara en la parte exterior, según se indica en la Figura 26 :

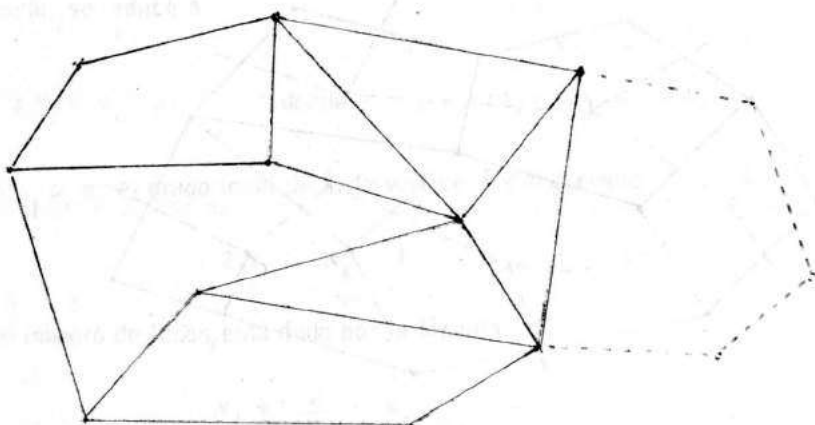


Figura 26

Si al nuevo gráfico se han agregado  $r$  lados, entonces se han agregado  $r-1$  vértices. Luego la relación de Euler se sigue cumpliendo; en efecto:

$$N_v^* + N_c^* - N_l^* = (N_v + r - 1) + (N_c + 1) - (N_l + r) = N_v + N_c - N_l = 2$$

donde  $N_v^*$ ,  $N_c^*$  y  $N_l^*$  indican el número de vértices, de caras y de lados del gráfico aumentado.

Dado un gráfico poligonal  $G$ , se puede construir a partir de él otro gráfico  $G^*$  de la siguiente manera:

Dentro de cada cara, incluyendo la infinita, se toma un punto. Si dos puntos están en dos caras adyacentes se unen por un lado el cual atraviesa el lado común a dichas caras, como se indica en la Figura 27.

El gráfico  $G^*$  así obtenido se llama *gráfico dual* de  $G$  y es también un gráfico poligonal.

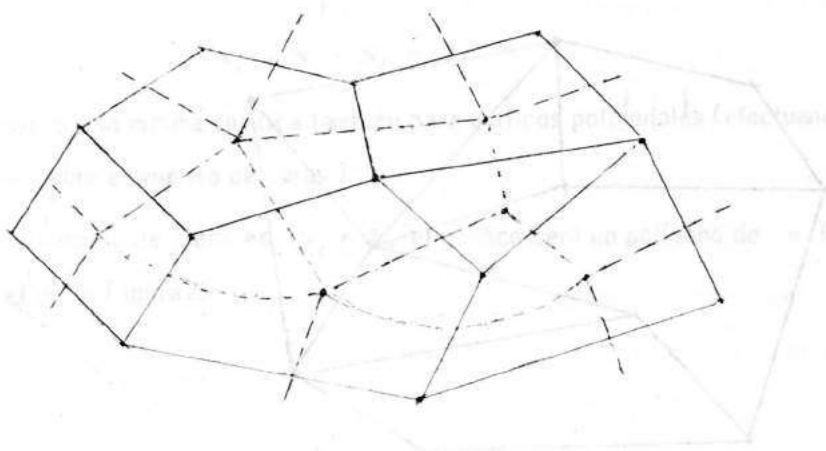


Figura 27

Un gráfico se dice **regular**, si en todos los vértices incide el mismo número de lados. Por ejemplo, en el gráfico de la Figura 28 el grado local de cada vértice es tres.

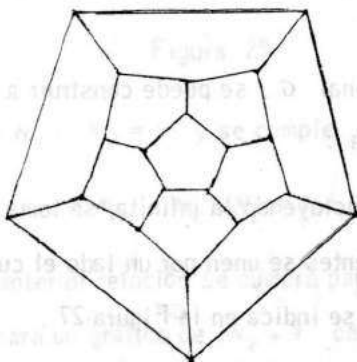


Figura 28

Cuando el gráfico es regular, la fórmula para el número de lados en función del grado local, se reduce a

$$2 N_l = N_v \cdot \rho \quad \text{donde} \quad \rho = \rho(A_1) = \dots = \rho(A_n)$$

es decir,  $\rho$  es el grado local de cada vértice. En el ejemplo :

$$2 N_l = N_v \cdot 3 ;$$

luego el número de lados está dado por la fórmula :

$$(1) \quad N_l = \frac{\rho}{2} \cdot N_v$$

Un gráfico poligonal  $G$  se dice que es *completamente regular*, si tanto  $G$  como su dual  $G^*$  son regulares. Pero si  $G^*$  es regular, el número de lados de cada vértice de  $G^*$  es el mismo.

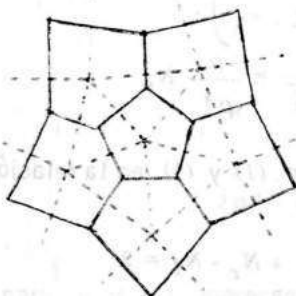


Figura 29

Como a cada lado de  $G^*$ , corresponde un lado frontera de la cara donde está di-

cho vértice; esto significa que cada cara de  $G$  está limitada por el mismo número de lados, digamos  $\rho^*$  (ver Figura 29).

En resumen un gráfico poligonal  $G$  que es completamente regular, tiene el mismo número de lados  $\rho$  en cada vértice, y cada cara está limitada por el mismo número de lados  $\rho^*$ .

Cuando el gráfico es completamente regular la fórmula para el número de lados en función del número de lados de cada cara, se reduce a :

$$2 N_l = \rho^* N_c$$

puesto que en  $G$ , todas las caras están limitadas por  $\rho^*$  lados. Luego el número de lados está dado también por la fórmula :

$$(2) \quad N_l = \frac{\rho^*}{2} N_c$$

De las fórmulas (1) y (2) se obtiene el número de caras en función del número de vértices :

$$(3) \quad N_c = \frac{\rho}{\rho^*} N_v$$

Sustituyendo las fórmulas (1) y (3) en la relación de Euler

$$N_v + N_c - N_l = 2$$

se llega a :

$$N_v + \frac{\rho}{\rho^*} N_v - \frac{\rho}{2} N_v = 2$$

$$N_v \left( 1 + \frac{\rho}{\rho^*} - \frac{\rho}{2} \right) = 2$$

y entonces

$$(4) \quad N_v (2 \rho^* + 2 \rho - \rho \cdot \rho^*) = 4 \rho^*$$

Como  $N_v$  y  $\rho^*$  son enteros positivos se tiene que

$$2 \rho^* + 2 \rho - \rho \cdot \rho^* > 0$$

Sumando 4 y multiplicando por -1 se obtiene la desigualdad :

$$(\rho - 2) (\rho^* - 2) < 4$$

Para resolver esta desigualdad suponemos que ambos números  $(\rho - 2)$  y  $(\rho^* - 2)$  son positivos, o sea cuando  $\rho$  y  $\rho^*$  son mayores que 2.

Puesto que las únicas parejas de enteros positivos cuyo producto es menor que 4 son :  $(1, 1)$   $(1, 2)$   $(1, 3)$  se obtienen 5 posibilidades a saber :

$$i) \quad \rho - 2 = 1$$

$$\begin{cases} \rho^* - 2 = 1 \\ \rho^* - 2 = 2 \\ \rho^* - 2 = 3 \end{cases}$$

$$ii) \quad \rho - 2 = 2$$

$$\{ \rho^* - 2 = 1$$

$$iii) \quad \rho - 2 = 3$$

$$\{ \rho^* - 2 = 1$$

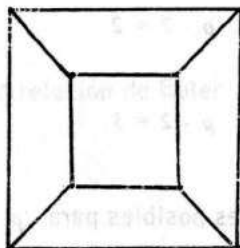
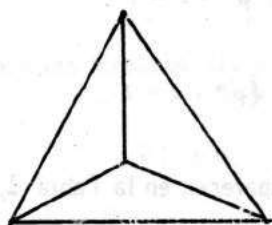
Los 5 valores posibles para  $\rho$  y  $\rho^*$  aparecen en la Tabla 1, y con ellos los correspondientes valores para  $N_v$ ,  $N_I$ , y  $N_C$ , los cuales se obtienen de las relaciones (4), (1) y (3).

La tabla nos muestra la existencia de cinco gráficos completamente regulares.

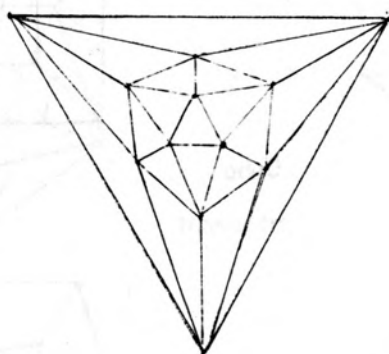
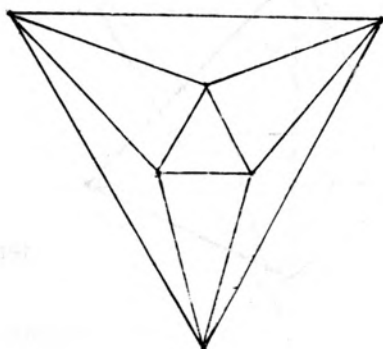
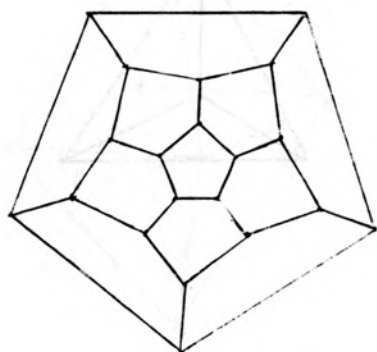
$\rho$	$\rho^*$	$N_v$	$N_l$	$N_c$	Tipo
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	8	12	6	Cubo
3	5	20	30	12	Dodecaedro
4	3	6	12	8	Octaedro
5	3	12	30	20	Icosaedro

Tabla 1

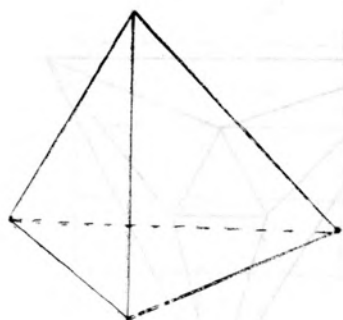
Para construirlos se parte de un triángulo, un cuadrado o un pentágono según que  $\rho^*$  valga 3, 4 ó 5.



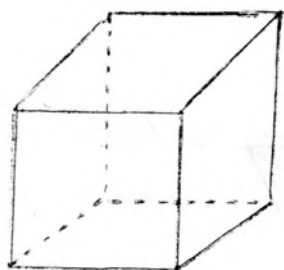
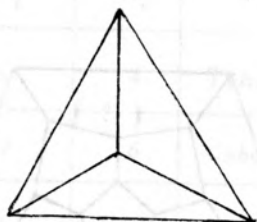




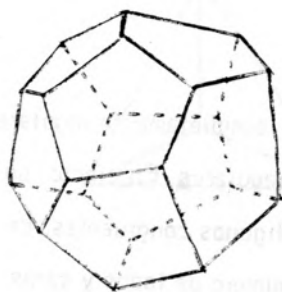
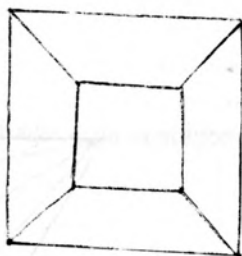
La anterior discusión sobre gráficos poligonales completamente regulares, muestra la existencia de solamente cinco poliedros regulares. En efecto, un poliedro regular es un sólido cuyas caras son todos polígonos congruentes, de tal manera que en cada vértice se encuentra el mismo número de lados y caras. Es así como el gráfico de un poliedro regular es un gráfico completamente regular. Los casos posibles se ilustran a continuación :



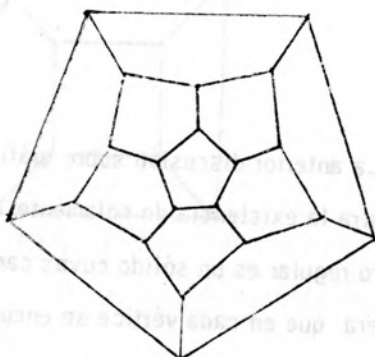
tetraedro

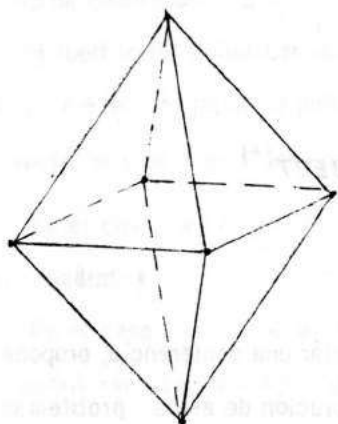


Cubo

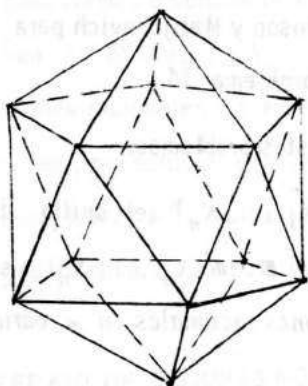
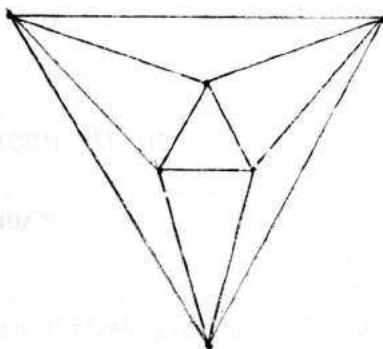


dodecaedro

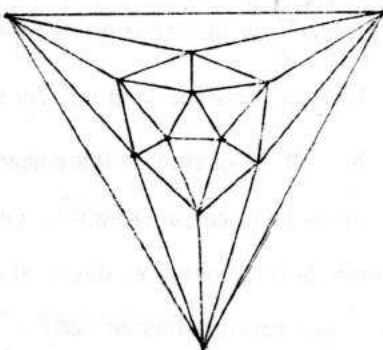




Octaedro



Icosaedro



El estudio de la desigualdad cuando  $\rho$  (o  $\rho^*$ ) toma los valores 2 ó 1, lleva a dos gráficos triviales, los cuales corresponden a poliedros regulares.