Boletín de Matemáticas
Vol. VII, Nº 4 , pp. 265-271

EL METODO DE LAPLACE PARA LA EVALUACION APROXIMADA DE INTEGRALES

JOSE M. CASTRO O.

En los desarrollos asintóticos de funciones, bien sea que estén definidas por series o por integrales es conveniente usar el símbolo O el cual se define de la siguiente manera :

Se dice que una función φ es de orden $O(\psi)$ en un conjunto R, si existe una constante K tal que para todo x que pertenece a R se tiene que $|\varphi| \leq K|\psi|$. Se dice que φ es de orden $O(\psi)$ cuando $x \to x_o$ (x_o es un punto límite de R) si existe una constante K y una vecindad $V(x_o)$ tal que $|\varphi| \leq K|\psi|$ para todo x que pertenezca a $V \cap R$. Cuando $\psi \neq 0$ en R, φ es de orden $O(\psi)$ en R cuando $x \to x_o$, si φ/ψ es acotada en dicho conjunto.

Existen varios métodos para desarrollar asintóticamente una función cuando esta viene expresada en forma de una integral; entre ellos se pueden citar :

a) Método de Integración por partes.

b) Método del punto de silla.

c) Método de Laplace .

En esta nota daremos una idea sobre el último de ellos.

El método de Laplace. Consideremos la función $f(x) = \int_a^b e^{x\,h(t)}\, g(t)\, dt$,

$-\infty < a < b < +\infty$. Las funciones $h(t)$ y $g(t)$ satisfacen las siguientes hipótesis :

a) $h(t)$ es una función de variable real con un máximo en $t = c$, $a < c < b$. Es decir, para $\delta > 0$ existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que $h(t) \leq h(c) - \varepsilon$ fuera del intervalo $(c-\delta, c+\delta)$.

b) $h(t)$ es dos veces continuamente diferenciable cerca a $t = c$, y $h''(c) < 0$. Cerca al punto c , $h(t)$ se puede escribir en la forma $h(t) = h(c) + \frac{h''(c)}{2!}(t-c)^2 + O(t-c)^3$. (Las derivadas de orden impar, se anulan) , y una aproximación para $h(t)$ sería :

$$h(t) = h(c) + \frac{h''(c)}{2!}(t-c)^2 .$$

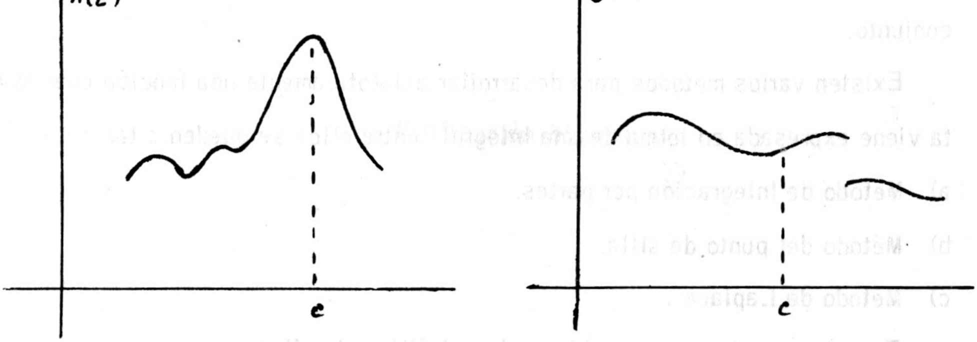
c) $g(t)$ es una función que puede ser real o compleja.

d) $g(t)$ es continua en $t = c$ y $g(c) \neq 0$.

e) $|g| \leq M$

f) $|g(t)\, e^{x\,h(t)}| \leq M\, e^{x[h(c) - \alpha]}$; siendo $\alpha > 0$ y dependiente de δ .

Las funciones $h(t)$ y $g(t)$ pueden visualizarse aproximadamente en la siguiente forma :



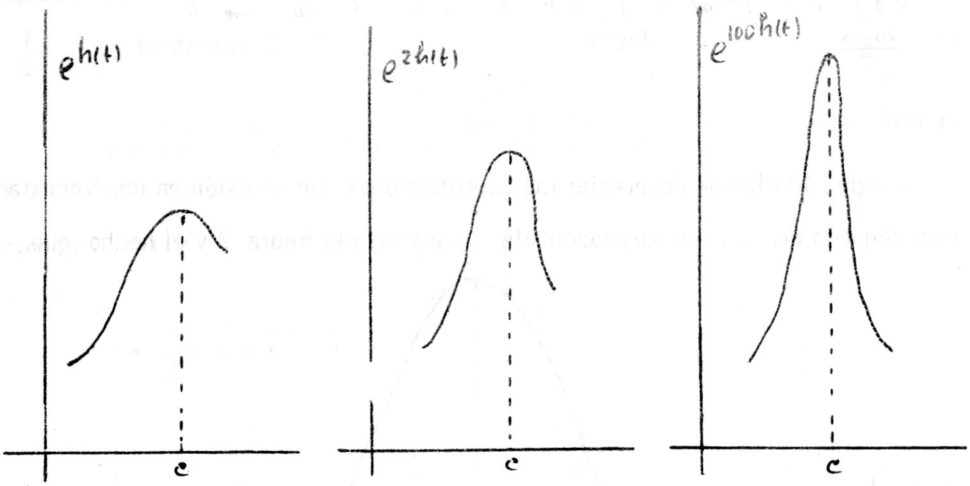


Figura 1

El problema consiste en estudiar el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \infty$. $e^{x\,h(t)}$ tiene un máximo en $t = c$; cuando x es muy grande, este máximo también lo es, por lo tanto, una vecindad pequeña de $t = c$ da *la única contribución importante para* $f(x)$.

Veamos un ejemplo :

Sea $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt^2} |t|^m \, dt \qquad m \geq 0$. Entonces $I = 2 \int_0^{\infty} e^{-xt^2} t^m \, dt$.

Hagamos $x t^2 = \mu$, entonces :

$$I = 2 \int_0^{\infty} e^{-\mu} \mu^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} x^{-(\frac{m+1}{2})} du = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) x^{-(\frac{m+1}{2})} .$$

Cuando x toma valores muy grandes la contribución a I, para valores de t, que cumplan la condición $|t| > \frac{1}{\sqrt{x}} \log x$, se puede despreciar. En efecto :

$$I - \int_{-\log x/\sqrt{x}}^{\log x/\sqrt{x}} e^{-xt^2} |t|^m \, dt = I - 2 \int_0^{\log x/\sqrt{x}} e^{-xt^2} t^m \, dt =$$

$$= 2\int_{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}^{\infty} e^{-xt^2} t^m \, dt = \int_{\log^2 x}^{\infty} e^{-\mu} \mu^{(\frac{m-1}{2})} \cdot x^{-(\frac{m+1}{2})} du \to 0$$

cuando $x \to \infty$.

Luego , la idea de despreciar las contribuciones que no estén en una vecindad muy pequeña de c , es muy razonable, observando la figura 2 y el hecho que ,

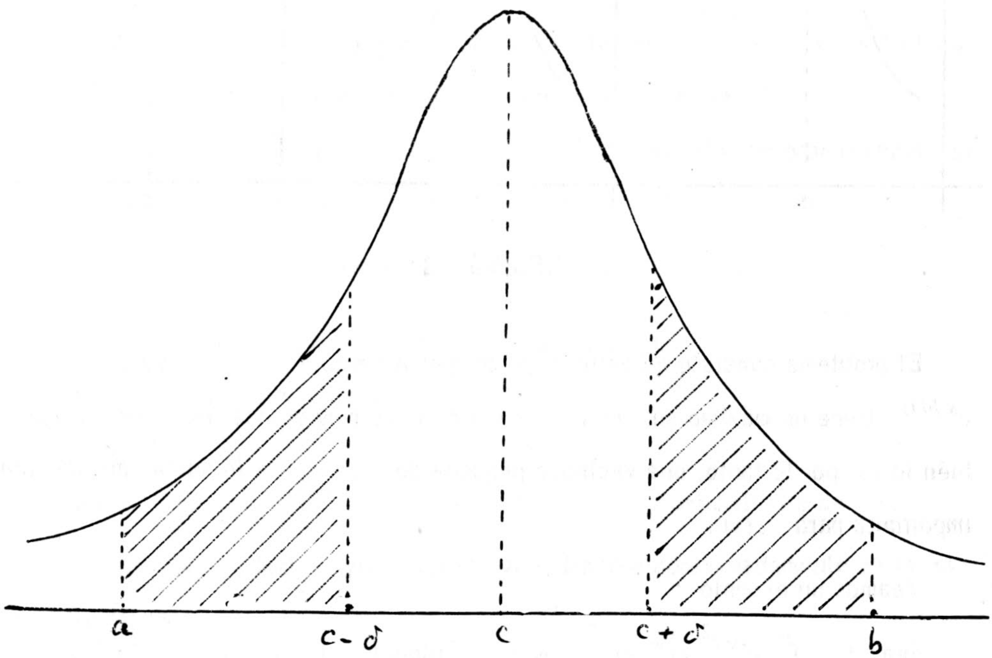


Figura 2

$$\left| \int_a^{c-\delta} e^{x h(t)} g(t) \, dt + \int_{c+\delta}^{b} e^{x h(t)} g(t) \, dt \right| < M(b-a) \, e^{x[h(c) - \alpha]} ,$$

en donde α es un número mayor que cero y que depende de δ .

Ejemplo 1. Encontrar un desarrollo asintótico para la función :

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2 + xt} \, dt .$$

Solución . La función $e^{-t^2+xt}\,dt$ tiene un máximo en $t = \frac{1}{2}x$. Hagamos $t = \frac{1}{2}x\mu$ y tendremos :

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2+xt}\,dt = \frac{1}{2}\,x\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2}\mu^2-\mu\right)}\,du\,.$$

Haciendo $u = 1 + v$ se tiene :

$$I = \frac{1}{2}\,x\int_{-1}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}(-1/2+1/2\ v^2)}\,dv$$

$$I \sim \frac{1}{2}\,x\ e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2v^2}{4}}\,dv \sim \frac{1}{2}\,x\ e^{\frac{x^2}{4}}\,.\,\sqrt{\frac{4\pi}{x^2}} = \sqrt{\pi}\ e^{\frac{x^2}{4}}$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2+xt}\,dt \sim \sqrt{\pi}\ e^{\frac{x^2}{4}}$$

Se puede dar una especie de receta, para el desarrollo asintótico de una función definida por una integral, cuando δ , el radio de la vecindad de c , es muy pequeño. (Ver figura 2).

$$f(x) \approx \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{x\,h(t)}\,g(t)\,dt\ , \qquad \delta \text{ pequeño .}$$

$$\approx g(c)\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{x\,h(t)}\,dt \qquad \text{(se ha usado la continuidad de } g(t) \text{ en } c.\text{)}$$

$$\approx g(c)\int_{-\delta}^{\delta} e^{x\,h(s+c)}\,ds\,.$$

$$\approx g(c)\int_{-\delta}^{\delta} e^{x\,h(c)+x\,h'(c)\,s+\frac{h''}{2!}(c)\,s^2}\,ds \qquad \text{(Desarrollo de Taylor).}$$

Nota: Sabemos que $h'(c) = 0$ y que $h''(c) < 0$. Despreciando los términos más allá de s^2 en la serie de Taylor, se tiene

$$f(x) \approx g(c) \int_{-\delta}^{\delta} e^{x\,h(c) + x\,\frac{h''}{2}\,s^2}\,ds\,.$$

$$\approx g(c)\, e^{x\,h(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2} x\, h''(c)\, s^2}\,ds\,.$$

Evaluando la integral se tiene finalmente :

$$f(x) \approx g(c)\, e^{x\,h(c)} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{-x\,h''(c)}}$$

***Ejemplo* 2.** Como

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^x\, dt = - \int_0^{\infty} e^{-t}\, e^{x \log t}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t + x \log t}\, dt\,,$$

haciendo $t = xv$ entonces $e^{-t + x \log t} = e^{-xv + x \log (xv)} = e^{x(-v + \log xv)}$,

luego $h(v) = -v + \log xv$, $h'(v) = -1 + \frac{1}{v}$, y $h''(v) = -\frac{1}{v^2}$. $h(v)$ tiene un máximo en $v = 1$.

Entonces :

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^x\, dt = \int_0^{\infty} e^{-xv + x \log v + x \log x} = X^{x+1} \int_0^{\infty} e^{x(-v + \log v)}\, dv$$

$$\approx X^{x+1} e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \approx \sqrt{2\pi}\; X^{x+1/2}\, e^{-x}$$ (Fórmula de Stirling).

Bibliografía

[1] Erdelyi , A. *Asymptotic Expansions*. Dover, 1956.

[2] De Bruijn, N. G. *Asymptotic Methods in Analysis*. North. Holland. Publishing Co., Amsterdam, 1961.

[3] Fuchs, W. H. Notas de clase. (Métodos Matemáticos de la física) Cornell University, Ithaca, N. Y., 1970.

* * *

Meta científica

Aunque en el curso de los últimos tres siglos las teorías científicas han estado sometidas a toda clase de vicisitudes y cambios, el motivo principal que ha inspirado a los científicos ha sido siempre el mismo : la búsqueda de la unidad en la diversidad, el deseo de llevar armonía y orden a lo que podría a primera vista aparecer como un caos desesperante de hechos experimentales.

A. d'Abro