Boletín de Matemáticas
Vol. VI No. 6 - pp. 1-27

POLINOMIOS DE TSCHEBYSHEFF

YU TAKEUCHI

1. Introducción.

En la matemática pura y aplicada se usan varios polinomios, por ejemplo, los polinomios de Legendre $P_n(x)$, los polinomios de Hermite $H_n(x)$, los polinomios de Laguerre $L_n(x)$, los polinomios de Jacobi $G_n(x)$, los polinomios de Tschebysheff $T_n(x)$, los polinomios de Lommel $R_n(x)$ etc. y todos ellos están estrechamente relacionados con algún tipo de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Los polinomios de Tschebysheff pueden ser estudiados a nivel elemental, razón por la cual los libros apenas mencionan sus nombres o algunas propiedades sin dar detalles [1], [2], [3], [4], [5] a pesar de tener gran utilidad en muchos campos de la matemática aplicada. En esta nota, daremos un desarrollo completo de los polinomios de Tschebysheff con el objeto de facilitar sus aplicaciones, o para satisfacer la curiosidad de algunos estudiantes.

2. Polinomios de Tschebysheff, T_n y U_n.

Por trigonometría elemental sabemos que :

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, $\qquad\qquad$ $\operatorname{sen} 2\theta = \operatorname{sen}\theta\,(2\cos\theta)$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \qquad \operatorname{sen} 3\theta = \operatorname{sen}\theta\,(4\cos^2\theta - 1)$$

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2 + 1, \qquad \operatorname{sen} 4\theta = \operatorname{sen}\theta\,(8\cos^3\theta - 4\cos\theta),$$

etc.

Estas fórmulas nos sugieren que en general $\cos n\theta$ puede ser expresado como un polinomio de grado n de $\cos\theta$, y que $\operatorname{sen} n\theta$ es el producto de $\operatorname{sen}\theta$ y un polinomio de grado $n-1$ de $\cos\theta$. En realidad, es fácil demostrar este hecho por inducción.

Supongamos que

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta), \quad \operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}\theta \cdot S_{n-1}(\cos\theta) \tag{1}$$

donde T_n es un polinomio de grado n, y S_{n-1} es un polinomio de grado $n-1$. Entonces :

$$\begin{aligned}
\cos(n+1)\theta &= \cos n\theta\,\cos\theta - \operatorname{sen} n\theta\,\operatorname{sen}\theta \\
&= T_n(\cos\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta \cdot S_{n-1}(\cos\theta) \\
&= T_n(\cos\theta)\cos\theta - (1-\cos^2\theta)\,S_{n-1}(\cos\theta),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(n+1)\theta &= \operatorname{sen} n\theta\,\cos\theta + \cos n\theta\,\operatorname{sen}\theta \\
&= \operatorname{sen}\theta \cdot S_{n-1}(\cos\theta)\cos\theta + T_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \\
&= \operatorname{sen}\theta \cdot S_{n-1}(\cos\theta)\cos\theta + T_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \\
&= \operatorname{sen}\theta\,[\cos\theta \cdot S_{n-1}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta)]\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Observándose que $\cos(n+1)\theta$ es un polinomio de grado $(n+1)$ de $\cos\theta$, y $\operatorname{sen}(n+1)\theta$ es un producto de $\operatorname{sen}\theta$ y un polinomio de grado n de $\cos\theta$ respectivamente. Además, haciendo $x = \cos\theta$ se obtienen las siguientes fórmulas de recurrencia para T_n y S_n :

$$T_{n+1}(x) = x\,T_n(x) - (1-x^2)\,S_{n-1}(x)$$
$$S_n(x) = x\,S_{n-1}(x) + T_n(x) \tag{4}$$

Por otro lado, podemos encontrar las expresiones de T_n y S_{n-1} como sigue: Utilizando la fórmula de Euler tenemos :

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta})$$

$$= \frac{1}{2}\{(\cos\theta + i\ \operatorname{sen}\theta)^n + (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^n\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i\operatorname{sen}\theta)^k + \sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(-i\operatorname{sen}\theta)^k\Big]$$

En la primera sumatoria aparece $(i\operatorname{sen}\theta)^k$ mientras que en la segunda aparece $(-i\operatorname{sen}\theta)^k$, razón por la cual cuando el subíndice k es impar los términos correspondientes en las dos sumas se anulan, luego solamente aparecerán los subíndices, digamos $k=2h$, obteniéndose así :

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\Big[\sum_{h=o}^{\leq n/2}\binom{n}{2h}(\cos\theta)^{n-2h}(i\operatorname{sen}\theta)^{2h} + \sum_{h=o}^{\leq n/2}\binom{n}{2h}(\cos\theta)^{n-2h}(-i\operatorname{sen}\theta)^{2h}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sum_{h=o}^{\leq n/2}\binom{n}{2h}(\cos\theta)^{n-2h}(i)^{2h}(\operatorname{sen}\theta)^{2h}$$

$$= \sum_{h=o}^{\leq n/2}(-1)^h\binom{n}{2h}(\cos\theta)^{n-2h}(1-\cos^2\theta)^h\ ,$$

donde el subíndice h toma los valores :

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Usando (1) y (5) y reemplazando x por $\cos\theta$ se obtiene una expresión para el polinomio $T_n(x)$:

$$T_n(x) = \sum_{h=o}^{\leq n/2} (-1)^h \binom{n}{2h} x^{n-2h} (1-x^2)^h \tag{6}$$

El polinomio T_n dado en (6) se llama *polinomio de Tschebysheff de grado* n o *función de Tschebysheff de grado* n *de primera clase*.

Por otra parte, usando la fórmula de Euler:

$$sen\, n\theta = \frac{1}{2i}\{ e^{in\theta} - e^{-in\partial} \}$$

$$= \frac{1}{2i}\{ (\cos\theta + i\, sen\,\theta)^n - (\cos\theta - i\, sen\,\theta)^n \}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k} (i\, sen\,\theta)^k - \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k} (-i\, sen\,\theta)^k \right]$$

Esta vez, los términos correspondientes a subíndices pares se anulan, y quedan únicamente los términos con subíndices impares, digamos $k = 2h+1$, obteniéndose

$$sen\, n\theta = \frac{1}{2i}\, 2 \sum_{h=o}^{< n/2} \binom{n}{2h+1} (\cos\ \theta)^{n-2h-1} (i\, sen\,\theta)^{2h+1}$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{h=o}^{< n/2} \binom{n}{2h+1} (i)^{2h}\, i (\cos\theta)^{n-2h-1} (sen\,\theta)^{2h}\, sen\,\theta$$

$$= sen\,\theta \sum_{h=o}^{< n/2} (-1)^h \binom{n}{2h+1} (\cos\theta)^{n-2h-1} (1-\cos^2\theta)^h \tag{7}$$

donde el subíndice h toma los valores:

$$h = 0, 1, 2, \ldots, \quad \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n-2}{2} & \text{si } n \text{ es par .} \end{cases}$$

Usando (1) y (7) y sustituyendo x por $\cos\theta$ se obtiene una expresión para el polinomio $S_{n-1}(x)$:

$$S_{n-1}(x) = \sum_{h=o}^{<n/2} (-1)^h \binom{n}{2h+1} x^{n-2h-1} (1-x^2)^h \tag{8}$$

La función $\operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}\theta\, S_{n-1}(\cos\theta) = \sqrt{1-x^2} \cdot S_{n-1}(x)$ se llama *función de Tschebysheff de segunda clase* y se acostumbra denotarla por $U_n(x)$, o sea :

$$U_n(x) = \sqrt{1-x^2} \,.\, S_{n-1}(x) \tag{9}$$

3. Ecuacion Diferencial de Tschebysheff. ([7]).

Es bien conocido que las funciones $\operatorname{sen} n\theta$ y $\cos n\theta$ satisfacen la ecuación diferencial :

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2 y = 0 \tag{10}$$

Haciendo la sustitución $x = \cos\theta$ tenemos :

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \frac{dy}{dx} \quad ,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\operatorname{sen}\theta \frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}(-\operatorname{sen}\theta)\frac{dy}{dx} + (-\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{d\theta}$$

$$= -\cos\theta \frac{dy}{dx} + \operatorname{sen}^2\theta \frac{d^2y}{dx^2} \quad ;$$

por lo tanto :

$$sen^2\theta \frac{d^2y}{dx^2} - \cos\theta \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0 ,$$

o sea

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0 . \qquad (11)$$

Esta última se llama *ecuación diferencial de Tschebysheff* y posee como soluciones independientes las dos funciones de Tschebysheff :

$$y = T_n(x) , \quad y = U_n(x) . \qquad (12)$$

4. *Fórmula Explícita para $T_n(x)$.* ([7])

Supongamos que la ecuación de Tschebysheff (11) tiene una solución en serie de potencias de x :

$$y = A_o + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_k x^k + \ldots = \Sigma_{k=o}^{\infty} A_k x^k \qquad (13)$$

entonces :

$$y' = \Sigma_{k=1}^{\infty} k A_k x^{k-1} , \quad y'' = \Sigma_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} \qquad (14)$$

Reemplazando (13) y (14) en (11) tenemos :

$$(1-x^2)\Sigma_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2} - x \Sigma_{k=1}^{\infty} k A_k x^{k-1} + n^2 \Sigma_{k=o}^{\infty} A_k x^k = 0 ,$$

ó

$$\Sigma_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k x^{k-2} - \Sigma_{k=2}^{\infty} k(k-1)A_k x^k - \Sigma_{k=1}^{\infty} k A_k x^k + \Sigma_{k=o}^{\infty} n^2 A_k x^k = 0 ,$$

$$\Sigma_{k=o}^{\infty}(k+2)(k+1)A_{k+2}x^k = \Sigma_{k=o}^{\infty}[k(k-1)+k-n^2]A_k x^k = 0 .$$

Comparando los coeficientes de x^k tenemos :

$$(k+2)(k+1)A_{k+2} = \{k(k-1)+k-n^2\}A_k \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

o sea

$$A_{k+2} = \frac{k^2-n^2}{(k+1)(k+2)}A_k \quad (k=0, 1, 2, \dots) . \qquad (15)$$

De (15) se observa que si $A_o = 0$ entonces

$$A_2 = 0, A_4 = 0, A_6 = 0, \dots .$$

por lo tanto todos los coeficientes pares son nulos, y los coeficientes impares son:

$$A_3 = \frac{1-n^2}{2.3}A_1 , A_5 = \frac{(1-n^2)(3^2-n^2)}{2.3.4.5}A_1 ,$$

y en general :

$$A_{2p+1} = \frac{(1-n^2)(3^2-n^2)(5^2-n^2)\dots\{(2p-1)^2-n^2\}}{(2p+1)!}A_1$$

Así, pues, tenemos una solución impar de la ecuación de Tschebysheff :

$$= y_1 = A_1[x - \frac{n^2-1^2}{3!}x^3 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}x^5 - \dots$$

$$+ (-1)^p \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots\{n^2-(2p-1)^2\}}{(2p+1)!}x^{2p+1} + \dots] \qquad (16)$$

De manera similar, si $A_1=0$ se tiene que todos los coeficientes impares son nulos, y los coeficientes pares son :

$$A_2 = \frac{-n^2}{1\cdot 2} A_o \quad , \quad A_4 = \frac{(-n^2)(2^2-n^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} A_o$$

y en general :

$$A_{2p} = \frac{(-n^2)(2^2-n^2)(4^2-n^2)\ldots\{(2p-2)^2-n^2\}}{(2p)!} A_o$$

Obtenemos así una solución par de la ecuación de Tschebysheff :

$$y_2 = A_o\,[\,1 - \frac{n^2}{2!}x^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}x^4 - \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{n^2(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(2p-2)^2\}}{(2p)!} x^{2p} + \ldots\,] \qquad (17)$$

Si n es impar, la solución impar es un polinomio de grado n, si n es par la solución par es un polinomio de grado n. Como $T_n(x)$ es la única solución de la ecuación de Tschebysheff (salvo un factor constante), las fórmulas (16) ó (17) nos dan la expresión explícita del polinomio $T_n(x)$ para un valor adecuado de A_1 ó de A_o. Si n es par,

$$T_n(\cos\frac{\pi}{2}) = \cos n\,\frac{\pi}{2} = (-1)^{n/2} \quad ,$$

reemplazando en (17) x por $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ se tiene :

$$T_n(\cos\frac{\pi}{2}) = A_o \, ,$$

o sea

$$A_o = (-1)^{n/2} \quad .$$

Luego la expresión de $T_n(x)$ para n par es :

$$T_n(x) = (-1)^{n/2} \left[1 - \frac{n^2}{2!} x^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!} x^4 - \ldots \right] \qquad (17')$$

Si n es impar,

$$\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{\cos n\theta}{\cos \theta} = \lim_{\theta \to \pi/2} \frac{n \operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen} \theta} \qquad \text{(Regla de L'Hopital)}$$

$$= n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = n(-1)^{\frac{n-1}{2}} .$$

Dividiendo (16) por x y tomando el límite cuando $x = \cos\theta \to \cos\frac{\pi}{2} = 0$ se tiene :

$$\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{T_n(\cos\theta)}{\cos\theta} = \lim_{x \to 0} A_1 \left[1 - \frac{n^2-1}{3!} x^2 + \ldots \right] = A_1 ,$$

o sea :

$$A_1 = n(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Luego la expresión de $T_n(x)$ para n impar :

$$T_n(x) = n(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[x - \frac{n^2-1^2}{3!} x^3 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!} x^5 - \ldots \right] \qquad (16')$$

■

La expresión de $U_n(x)$ se obtiene inmediatamente utilizando la identidad :

$$U_n(x) = \operatorname{sen} n\theta = -\frac{1}{n} \frac{d \cos n\theta}{d\theta} = -\frac{1}{n} \frac{d}{dx}(\cos n\theta) \frac{dx}{d\theta}$$

$$= -\frac{1}{n}(-\operatorname{sen}\theta) \frac{d T_n(x)}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \frac{d T_n(x)}{dx}$$

De (16') y (17') :

i) Si n es par :

$$U_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{1-x^2}\,.\, n x \,[\, 1 - \frac{n^2-2^2}{3!}\, x^3 + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\, x^5 - \ldots] \quad (17'')$$

ii) Si n es impar :

$$U_n(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, [\, 1 - \frac{n^2-1^2}{2!}\, x^2 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\, x^4 - \ldots] \,. \quad \blacksquare \qquad (16'')$$

Ahora hallaremos el coeficiente de x^n en $T_n(x)$. Si n es par el último coeficiente del polinomio (17') es :

$$(-1)^{n/2} [\, (-1)^{n/2} \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2) \ldots \{ n^2-(n-2)^2 \}}{n!} \,]$$

$$= \frac{n^2(n-2)(n+2)(n-4)(n+4) \ldots 2(2n-2)}{n!}$$

$$= \frac{n\,.\,2\,.\,4 \ldots (n-2) n (n+2)(n+4) \ldots (2n-2)}{n!}$$

$$= \frac{2^{n-1}\, n\, (n-1)!}{n!} = 2^{n-1} \,. \qquad (18)$$

Si n es impar, el último coeficiente de (16') es :

$$\frac{n(-1)^{\frac{n-1}{2}} [\, (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n^2-1^2)(n^2-3^2) \ldots \{ n^2-(n-2)^2 \} \,]}{n!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)(n-3)(n+3) \ldots 2(2n-2)}{n!}$$

$$= \frac{n\,.\,2\,.\,4 \ldots (n-1)(n+1) \ldots (2n-2)}{n!}$$

$$= \frac{2^{n-1} n\ (n-1)!}{n!} = 2^{n-1} \ . \tag{19}$$

Para obtener la expresión del polinomio $T_n(x)$ en forma de potencias descendientes, reemplazamos sucesivamente k por $n-2,\ n-4,\ n-6, \ldots\ n-2j$ en (15) y multiplicamos los resultados miembro a miembro obteniéndose

$$A_{n-2j} = (-1)^j \frac{n(n-j-1)(n-j-2)\ldots(n-2j+1)}{j!\ 2^{2j}} A_n$$

Observando (18) y (19), vemos que $A_n = 2^{n-1}$ en cualquier caso, luego :

$$A_{n-2j} = (-1)^j \frac{n(n-j-1)(n-j-2)\ldots(n-2j+1)}{j!\ 2^{2j}} 2^{n-1}$$

$$= (-1)^j \frac{n(n-j-1)!}{2\ .(n-2j)!\ j!} 2^{n-2j} = \frac{n}{2(n-j)} \binom{n-j}{j} . 2^{n-2j}$$

Por lo tanto :

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n - n\ .\ 2^{n-3} x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2\ !} 2^{n-5} x^{n-4} - \ldots$$

$$= \frac{1}{2} [(2x)^n + n \sum_{j=1}^{\leq n/2} (-1)^j \frac{1}{n-j} \binom{n-j}{j} (2x)^{n-2j}] \tag{20}$$

5. *sen* $n\theta$ *, cos* $n\theta$ *como funciones de sen* θ *.*

Si hacemos la sustitución $x = sen\ \theta$ en la ecuación diferencial (10), obtenemos

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = cos\ \theta \frac{dy}{dx} \quad ,$$

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} cos\ \theta \frac{dy}{dx} + cos\ \theta \frac{d}{dx} (\frac{dy}{dx}) \frac{dx}{d\theta}$$

$$= -\ sen\,\theta \frac{dy}{dx} + cos^2\theta \frac{d^2 y}{dx^2} \quad ,$$

por lo tanto :

$$- sen\theta \frac{dy}{dx} + cos^2\theta \frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0 \;;$$

o sea

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0 \;. \tag{21}$$

Esta última es idénticamente igual a la ecuación (11), por lo tanto el y_1 y el y_2 dados en (16) y (17) son dos soluciones independientes de la ecuación (21). Teniendo en cuenta que $sen\theta$ es una función impar, la solución y_1 dada en (16) debe ser igual a $sen\, n\theta$, y la solución y_2 dada en (17) debe ser igual a $cos\, n\theta$ para los valores adecuados de A_o y A_1. Si $\theta = 0$ entonces $x = sen 0 = 0$, $cos(n0) = 1$, así que $A_o = 1$ para que y_2 en (17) sea igual a $cos\, n\theta$:

$$cos\, n\theta = 1 - \frac{n^2}{2!} x^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!} x^4 - \ldots \tag{22}$$

donde $x = sen\theta$.

Dividiendo (16) por x y tomando límite cuando $\theta \to 0$ (ó $x = sen\theta \to 0$) tenemos :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\, n\theta}{sen\theta} = \lim_{x \to 0} \frac{y_1}{x} = \lim_{x \to 0} A_1 [\, 1 - \frac{n^2-1}{3!} x^2 + \ldots \,] = A_1 \;,$$

luego :

$$A_1 = n \;.$$

Por lo tanto :

$$sen\, n\theta = nx\,[\, 1 - \frac{n^2-1^2}{3!} x^2 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!} x^4 - \ldots \,] \tag{23}$$

donde $x = sen\theta$,

Derivando la expresión para $cos\, n\theta$ dada en (22) con respecto a x :

$$\frac{d}{d\theta}\cos n\theta = \frac{d}{dx}(\cos n\theta)\,\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\cdot\frac{d}{dx}(\cos n\,\theta\,),$$

$$-n\,sen\,n\theta = \cos\theta\,[\,-\frac{n^2}{1!}\,x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{3\,!}\,x^3 - \frac{n^2(\,n^2-2^2)(\,n^2-4^2)}{5\,!}\,x^5 + \ldots\,];$$

o sea

$$\frac{sen\,n\,\theta}{\cos\theta} = n\,x\,[\,1 - \frac{n^2-2^2}{3\,!}x^2 + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5\,!}\,x^4 - \ldots\,]\,, \qquad (24)$$

$$(x = sen\,\theta\,)$$

En (23) se observa que $sen\,n\,\theta$ es un polinomio de grado n de $sen\,\theta$ si n es impar y en (24) se ve que $sen\,n\,\theta/\cos\theta$ es un polinomio de grado $n-1$ de $sen\,\theta$ si n es par.

6. *Funciones generatrices para $T_n(x)$ y para $U_n(x)$.*

Sea $z = r\,(\cos\,\theta\, + \,i\,sen\,\theta\,) = r\,e^{i\theta}$, si $|z| = r < 1$ tenemos :

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\,z^n = \Sigma_{n=o}^{\infty}\,z^n - 1 = \frac{1}{z-1} - 1 = \frac{-z}{z-1}\;; \qquad (25)$$

pero :

$$\frac{z}{1-z} = \frac{r\,e^{i\theta}}{1-r\,e^{i\theta}} = \frac{r\,e^{i\theta}(1-r\,e^{-i\theta})}{(1-r\,e^{i\theta})(1-r\,e^{-i\theta})}$$

$$= \frac{(r\cos\theta - r^2) + \;i\,r\,sen\,\theta}{1 - 2r\,\cos\theta\, + r^2}\,. \qquad (26)$$

Observando (25) y (26) :

$$\frac{(r\cos\theta - r^2) + i\,r\,sen\,\theta}{1-2\,r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\,r^n\,e^{\,in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty}\,r^n(\cos\,n\theta + i\,sen\,n\theta), \;(27)$$

y comparando la parte real de la identidad anterior, obtenemos :

$$\frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta . \tag{28}$$

Por lo tanto

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{(1-2r\cos\theta+r^2)+(2r\cos\theta-2r^2)}{1-2r\cos\theta+r^2} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta . \tag{29}$$

En (29), haciendo $x = \cos\theta$, $\cos n\theta = T_n(x)$, se obtiene la siguiente identidad:

$$\frac{1-r^2}{1-2rx+r^2} = T_o(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n T_n(x) , \tag{30}$$

donde $T_o(x) = 1$, la cual nos muestra que $\frac{1-r^2}{1-2rx+r^2}$ es una *función generatriz* de . T_n .

Comparando la parte imaginaria de ambos miembros en la igualdad (27) vemos que

$$\frac{r \operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta . \tag{31}$$

Dividiendo la identidad anterior por r y haciendo $x = \cos\theta$, $\operatorname{sen} n\theta = U_n(x)$, se obtiene la identidad siguiente :

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2rx+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} U_n(x) , \tag{32}$$

luego la función

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2rx+r^2}$$

es una generatriz de U_n .

7. *Fórmulas de recurrencia para* T_n *y* U_n .

De la primera ecuación de (4), despejando S_{n-1} tenemos :

$$S_{n-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}\,[\,x\,T_n(x) - T_{n+1}(x)\,]\ ;$$

reemplazando esta expresión en la segunda ecuación de (4) :

$$\frac{1}{1-x^2}[\,x\,T_{n+1}(x) - T_{n+2}(x)] = \frac{x}{1-x^2}\,[\,x\,T_n(x) - T_{n+1}(x)\,] + T_n(x)\ ,$$

o sea

$$T_{n+2}(x) - 2\,x\,T_{n+1}(x) + T_n(x) = 0\ . \tag{33}$$

Despejando T_n de la segunda ecuación de (4) :

$$T_n(x) = S_n(x) - x\,S_{n-1}(x)\ ,$$

reemplazando ésta en la primera ecuación de (4) :

$$S_{n+1}(x) - x\,S_n(x) = x\,[\,S_n(x) - x\,S_{n-1}(x)\,] - (1-x^2)\,S_{n-1}(x)\ ,$$

o sea :

$$S_{n+1}(x) - 2x\,S_n(x) + S_{n-1}(x) = 0 \tag{34}$$

Multiplicando por $\sqrt{1-x^2}$, y teniendo en cuenta que $U_n(x) = \sqrt{1-x^2}\cdot S_{n-1}(x)$ se obtiene :

$$U_{n+2}(x) - 2x\,U_{n+1}(x) + U_n(x) = 0\ . \tag{35}$$

(33) y (35) son las fórmulas de recurrencia para T_n y U_n .

8. *Ortogonalidad de* T_n *y* U_n .

Usando la ortogonalidad de las funciones $\cos n\theta$:

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos k\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ \pi/2 & \text{si} \quad n = k \neq 0 \\ \pi & \text{si} \quad n = k = 0 \; , \end{cases}$$

y efectuando la sustitución $x = \cos \theta$ $dx = -\operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\sqrt{1-x^2}\, d\theta$ $\cos n\theta =$
$= T_n(\cos\theta) = T_n(x)$, $\cos k\theta = T_k(\cos k\theta) = T_k(x)$,

obtenemos :

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos k\theta \, d\theta = \int_1^{-1} T_n(x)\, T_k(x) \left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \;,$$

de donde se obtiene la siguiente relación de ortogonalidad para los polinomios de Tschebysheff :

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ \pi/2 & \text{si} \quad n = k \neq 0 \\ \pi & \text{si} \quad n = k = 0 \; . \end{cases} \tag{36}$$

De la misma manera, la ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen} n\theta$:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} k\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ \pi/2 & \text{si} \quad n = k \neq 0 \end{cases}$$

nos conduce a la siguiente relación de ortogonalidad para las funciones $U_n(x)$, por medio de la sustitución

$$\cos\theta = x \; , \; d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$sen\ k\,\theta = U_n(x) \quad , \quad sen\ k\,\theta = U_k(x)\ :$$

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)\, U_k(x)\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ \pi/2 & \text{si} \quad n = k \neq 0 \end{cases} \tag{37}$$

9. *Fórmulas explícitas para* T_n y U_n

Sean $x = \cos\theta$, $t = \cos\frac{1}{2}\theta$ entonces :

$$T_n(x) = \cos n\theta = \cos 2n\left(\frac{1}{2}\theta\right) = T_{2n}(t)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} t^{2n-2k} (1-t^2)^k$$

$$= \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \frac{(1+x)^{n-k}(1-x)^k}{2^n} \tag{38}$$

ya que

$$1 + x = 1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta = 2\,t^2 \quad ,$$

$$1 - x = 1 - \cos\theta = 2\,sen^2\frac{1}{2}\theta = 2\,(1 - t^2)\,.$$

Por otra parte, tenemos la siguiente identidad :

$$\binom{2n}{2k} = \frac{n!\,2^{2n}}{(2n)!}\binom{n}{k}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{2k-1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{2n-2k-1}{2}\right);$$

por lo tanto :

$$T_n(x) = \frac{n!\,2^n}{(2n)!}\sum_{k=o}^{n}\Big[(-1)^k\binom{n}{k}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{2k-1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{2n-2k-1}{2}\right)$$
$$(1+x)^{k-1/2}\Big]\,. \tag{39}$$

Teniendo en cuenta que :

$$\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{d^n}{dx^n}\{ (1+x)^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}} \}$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\ldots(n-\tfrac{2k-1}{2})(1+x)^{n-k-\frac{1}{2}}(-1)^{n-k}(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\ldots(n-\tfrac{2n-2k-1}{2})(1-x)^{k-\frac{1}{2}} . \qquad (40)$$

De (39) y (40) :

$$T_n(x) = \frac{n!\,2^n}{(2n)!}(-1)^n(1-x^2)^{1/2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{1-x^2}\;\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} , \qquad (41)$$

ya que

$$(1-x^2)^{1/2}(1+x)^{n-k-1/2}(1-x)^{k-1/2} = (1+x)^{n-k}(1-x)^k ,$$

$$(-1)^{n-k} = (-1)^n(-1)^k .$$

Para encontrar una fórmula similar a (41) para la función $U_n(x)$ utilizamos la siguiente identidad :

$$T_n(x) = \cos n\theta = \frac{1}{n}\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen} n\theta = \frac{1}{n}\{ \frac{d}{dx}U_n(x) \}\frac{d\cos\theta}{d\theta}$$

$$= -\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\theta\frac{d}{dx}U_n(x) = -\frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}U_n(x) .$$

En efecto, se tiene :

$$\frac{(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n(1-x^2)^{n-1/2}}{dx^n} = -\frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}U_n(x) ,$$

o sea :

$$\frac{d\,U_n(x)}{dx} = \frac{(-1)^{n-1}\,n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\;\frac{d^n(1-x^2)^{n-1/2}}{dx^n}\,. \tag{42}$$

Integrando (42) y teniendo en cuenta que $U_n(1) = 0$ se obtiene :

$$U_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}\,n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\;\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-1/2}}{dx^{n-1}}\,. \tag{43}$$

10. *Raíces de $T_n(x)$ y $U_n(x)$.*

Las raíces de $\cos n\theta$ en el intervalo $[0,\pi]$ son :

$$\theta = \frac{\pi}{2n},\ \frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n},\ \frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\pi}{2n}+\frac{n-1}{n}\pi\ ,$$

por lo tanto, las raíces de $T_n(x) = \cos n\theta = \cos(n(\cos^{-1}x))$ son :

$$\cos^{-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right),\ \cos^{-1}\left(\frac{3}{2n}\pi\right),\ \cos^{-1}\left(\frac{5}{2n}\pi\right),\ \ldots,\ \cos^{-1}\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right). \tag{44}$$

Como $T_n(x)$ es un polinomio de grado n , existen a lo más n raíces; entonces las n raíces dadas en (44) son simples, y están todas entre -1 y 1.

Las raíces de $sen\ n\theta$ en el intervalo $[0,\pi]$ son :

$$0,\ \frac{\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{3\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n}\pi,\ \pi\ ,$$

por lo tanto, las raíces de $U_n(x) = sen\ n\theta = sen(n\cos^{-1}x)$ son :

$$1,\ \cos^{-1}\frac{\pi}{n},\ \cos^{-1}\frac{2\pi}{n},\ \cos^{-1}\frac{3\pi}{n},\ \ldots,\ \cos^{-1}\frac{n-1}{n}\pi,\ -1\ . \tag{45}$$

Sabemos que $U_n(x) = \sqrt{1-x^2}\ S_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, por lo tanto $U_n(x)$ tiene $n-1$ raíces entre -1 y 1, luego las $(n+1)$ raíces dadas en (45) son todas simples. ■

Valor del producto $\quad sen\frac{\pi}{n}\ sen\frac{2\pi}{n}\ sen\frac{3\pi}{n}\ \ldots\ sen\frac{n-1}{n}\pi$.

Las raíces de $sen\ n\theta$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ son :

$$0,\ \pm\frac{\pi}{n},\ \pm\frac{2\pi}{n}\ \ldots, \begin{cases} \pm\dfrac{n-2}{2n}\pi\ ,\ \dfrac{\pi}{2} & (\text{si } n \text{ es par}) \\ \pm\dfrac{n-3}{2n}\pi\ ,\ \pm\dfrac{n-1}{2n}\pi & (\text{si } n \text{ es impar}), \end{cases}$$

entonces las raíces de la función $sen(n.\,sen^{-1}x)$ son :

$$0,\ \pm sen\frac{\pi}{n},\ \pm sen\frac{2\pi}{n},\ \ldots, \begin{cases} \pm sen\dfrac{n-2}{2n}\pi\ ,\ 1 & (\text{si } n \text{ es par}) \\ \pm sen\dfrac{n-3}{2n}\pi\ ,\quad \pm sen\dfrac{n-1}{2n}\pi & (\text{si } n \text{ es impar}). \end{cases}$$

Si n par, de (24) se concluye que la siguiente función :

$$\frac{sen\ n\theta}{sen\theta\cos\theta} = \frac{sen(n\,sen^{-1}x)}{x\sqrt{1-x^2}}$$

es un polinomio de grado $n-2$:

$$\frac{sen\ n\theta}{sen\theta\cos\theta} = n\left[1-\frac{n^2-2^2}{3!}x^2+\ldots+(-1)^{n/2-1}\frac{(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(n-2)^2\}}{(n-1)!}x^{n-2}\right] \quad (46)$$

Este polinomio tiene $n-2$ raíces simples a saber :

$$\pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}, \pm \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}, \ldots, \pm \operatorname{sen} \frac{n-2}{2n} \pi \qquad (47)$$

El producto de estas $n-2$ raíces es igual a :

$$- \frac{1}{\text{coeficiente de } x^{n-2}} = (-1)^{n/2} \frac{(n-1)!}{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots\{n^2-(n-2)^2\}}$$

$$= (-1)^{n/2} \frac{(n-1)!}{(n+2)(n-2)(n+4)(n-4)\ldots(2n-2)\,2}$$

$$= (-1)^{n/2} \frac{n(n-1)!}{2.4\ldots(n-2)n(n+2)\ldots(2n-2)} = (-1)^{n/2} \frac{n}{2^{n-1}} \,, \qquad (48)$$

En caso de ser n impar, de (23) se tiene que la función :

$$\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}(n \operatorname{sen}^{-1} x)}{\operatorname{sen}\theta}$$

es un polinomio de grado $n-1$:

$$\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} = n\left[1 - \frac{n^2-1}{3!}x^2 + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots\{n^2-(n-2)^2\}}{n!} x^{n-1}\right]. \qquad (49)$$

Este polinomio tiene $n-1$ raíces simples , a saber

$$\pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}, \pm \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}, \ldots, \pm \operatorname{sen} \frac{n-1}{2n} \pi \quad . \qquad (50)$$

El producto de estas $n-1$ raíces es igual a :

$$- \frac{1}{\text{coeficiente de } x^{n-1}} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n!}{(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots\{n^2-(n-2)^2\}}$$

$$= (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n!}{(n+1)(n-1)(n+3)(n-3)\ldots(2n-2)2} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n}{2^{n-1}} \quad ; \qquad (51)$$

De (47), (48), (50) y (51) tenemos :

$$sen\,\frac{\pi}{n} \,.\, sen\,\frac{2\pi}{n}\; sen\,\frac{3\pi}{n} \quad \ldots \quad sen\,\frac{n-1}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}} \qquad (52)$$

ya que el producto anterior es positivo.

Nota 1. Si n es par, el producto (52) tiene un factor más que el producto (en valor absoluto) de las raíces dadas en (47); este factor sobrante es 1 y no afecta el valor final.

11. Caracterización de los polinomios de Tschebysheff .

I. De la expresión (20) se obtiene :

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \frac{n}{2^n} \sum_{j=1}^{\leq n/2} (-1)^j \frac{1}{n-j} \binom{n-j}{j} (2x)^{n-2j} \qquad (53)$$

Como $T_n(x) = cos(n \,.\, cos^{-1} x)$, el valor *máximo* del polinomio (53) en $[-1, 1]$ es $1/2^{n-1}$ y su valor *mínimo* en el mismo intervalo es $-1/2^{n-1}$, o sea que el máximo del valor absoluto del polinomio (53) en $[-1, 1]$ es $1/2^{n-1}$. Sea f cualquier *polinomio unitario* de grado n :

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad ; \qquad (54)$$

si $f(x) \neq T_n(x) / 2^{n-1}$ entonces el máximo de $|f(x)|$ en $[-1, 1]$ es siempre mayor que $1/2^{n-1}$, o sea que tenemos la siguiente caracterización de los polinomios de Tschebysheff :

Sea f *un polinomio unitario de grado* n, *entonces el valor máximo de* $|f(x)|$ *en* $[-1, 1]$ *es mínimo cuando* $f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

Demostración. Supongamos que

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{para todo} \quad x \in [-1, 1]$$

o sea

$$-\frac{1}{2^{n-1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \tag{55}$$

Entonces :

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) + \left\{ f(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right\}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) + g(x) \tag{56}$$

donde $g(x) = f(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ es un polinomio de grado $n-1$.

El polinomio $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cos^{-1} x)$ tiene máximos ó mínimos en $n+1$ puntos del intervalo cerrado $[-1, 1]$. Sean

$$-1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n < \alpha_{n+1} = 1 \tag{57}$$

los puntos en donde $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ tiene un máximo o un mínimo. Para mayor sencillez, supongamos que n es par, o sea que $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(-1) = \frac{1}{2^{n-1}}$ (máximo); entonces :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^{n-1}} T_n(\alpha_1) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\alpha_3) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\alpha_5) = \ldots = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{(valor máx.)} \\ &\frac{1}{2^{n-1}} T_n(\alpha_2) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\alpha_4) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\alpha_6) = \ldots = -\frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{(valor mín.)} \end{aligned} \tag{58}$$

De (55) y (56) se tiene :

$$-\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}} T_n(\alpha_k) + g(\alpha_k) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Reemplazando (58) en la desigualdad anterior se obtiene :

(i) si k es impar : $\frac{1}{2^{n-1}} + g(\alpha_k) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, o sea , $g(\alpha_k) \leq 0$.

(ii) si k es par : $-\frac{1}{2^{n-1}} \leq -\frac{1}{2^{n-1}} + g(\alpha_k)$, o sea , $g(\alpha_k) \geq 0$.

Esto es :

$$g(\alpha_1) \leq 0\ ,\ g(\alpha_2) \geq 0\ ,\ g(\alpha_3) \leq 0\ ,\ g(\alpha_4) \geq 0,\ g(\alpha_5) \leq 0\ , \ldots\ . \tag{59}$$

La condición (59) implica que la función g tiene n raíces (Nota 2) ; como g es un polinomio de grado $n-1$ esto es imposible a menos que g sea idéntica - mente nulo. Luego :

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)\ .$$

***Nota* 2.** Si en la condición (59) las desigualdades son estrictas, es decir

$$g(\alpha_1) < 0\ ,\ g(\alpha_2) > 0\ ,\ g(\alpha_3) < 0,\ g(\alpha_4) > 0\ , \ldots ,$$

entonces es evidente que g tiene una raíz entre α_k y α_{k+1} (Teorema del Valor Intermedio) y por lo tanto hay n raíces en $[\alpha_1, \alpha_{n+1}]$. Generalmente se demuestra la existencia de (por lo menos) n raíces de g bajo la condición (59) usando inducción con respecto a n :

(i) si $n = 1$, $g(\alpha_1) \leq 0$, $g(\alpha_2) \geq 0$.

Si $g(\alpha_1) = 0$ ó $g(\alpha_2) = 0$ entonces g tiene por lo menos una raíz en $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Si $g(\alpha_1) < 0$ y $g(\alpha_2) > 0$, por el teorema del valor intermedio g tiene por lo menos una raíz entre α_1 y α_2.

(ii) Supongamos válida la afirmación para $1, 2, 3, \ldots, n$. Sean

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \alpha_{n+2},$$

$$g(\alpha_1) \leq 0,\ g(\alpha_2) \geq 0,\ g(\alpha_3) \leq 0, \ldots .$$

Consideramos dos casos :

(A) Si $g(\alpha_k) \neq 0$ para algún $k, k \neq 1, k \neq n+2$ entonces por la hipótesis de inducción g tiene $k-1$ raíces en $[\alpha_1, \alpha_k]$ y hay $n+2-k$ raíces de g en $[\alpha_k, \alpha_{n+2}]$ entonces habrá $k-1+(n+2-k) = n+1$ raíces de g en $[\alpha_1, \alpha_{n+2}]$.

(B) Supongamos ahora que

$$g(\alpha_2) = g(\alpha_3) = g(\alpha_4) = \ldots = g(\alpha_n) = g(\alpha_{n+1}) = 0 .$$

Si $g(\alpha_1) = 0$, ó, si algunas de las raíces $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$ son múltiples, entonces es evidente que g tiene por lo menos $n+1$ raíces en $[\alpha_1, \alpha_{n+2}]$. Podemos entonces suponer que $g(\alpha_1) < 0$ y $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{n+1}$ son las únicas raíces simples de g en $(\alpha_1, \alpha_{n+1}]$. Entonces g debe tener por lo menos una raíz en $(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}]$ ya que :

(*) si n es par, g es decreciente en α_{n+1} y $g(\alpha_{n+2}) \geq 0$ (Fig. 2).

(**) si n es impar, g es creciente en α_{n+1} y $g(\alpha_{n+2}) \leq 0$ (Fig. 1).

Nótese que la última raíz puede ser α_{n+2}.

Por lo tanto, g tiene por lo menos $n+1$ raíces en $[\alpha_1, \alpha_{n+2}]$.

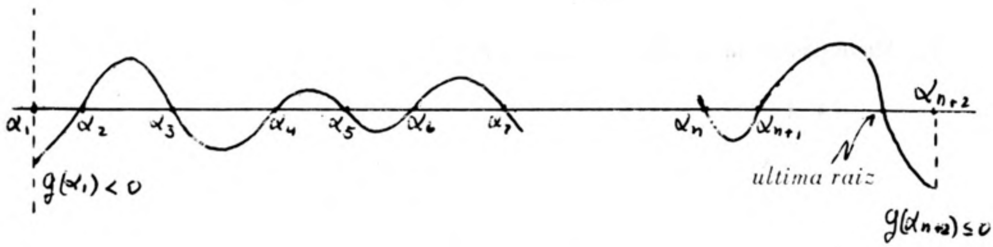

Fig. 1 (n impar)

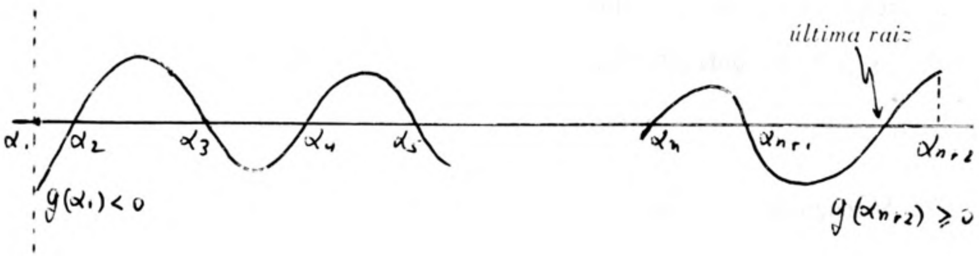

Fig. 2 (n = par)

II. De la definición de los polinomios de Tschebysheff, se tiene que $T_n(x)$ toma máximos locales o mínimos locales en $n-1$ puntos en el intervalor $(-1, 1)$, y que todos los valores máximos son iguales a 1 y todos los valores mínimos son iguales a -1. Recíprocamente, se puede demostrar que (ver [6]) :

Sea f un polinomio de grado n tal que

(i) f tiene extremos locales en $n-1$ puntos diferentes,

(ii) *todos los valores máximos de f son iguales y todos los valores mínimos de f son iguales.*

Entonces f es de la forma :

$$f(x) = a + b\, T_n(\alpha x + \beta)\,.$$

Esto es, f es el polinomio de Tschebysheff salvo una transformación de primer grado.

Referencias

[1] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi. *Higher Transcendental Functions* , Vol. II, pp. 183-187, Mc Graw Hill, 1953, New York.

[2] Jahnke Emde Losh. *Tables of Higher Functions*. Sixth. Ed. pp. 96 - 98, 1960 Mc Graw Hill , New York.

[3] Sansone. *Orthogonal Functions*, 1959, Interscience Pub. 1959.

[4] *The international Dictionary of Applied Mathematics*, p. 129, Van Nostrand Princeton, 1960.

[5] Yoshida, K. Diccionario de Matemática Aplicada (en japonés) pp.364-365, Maruzen, Tokyo, 1957.

[6] Takeuchi, Y. "Polinomios que toman un sólo valor máximo y un sólo valor mínimo", próximo a aparecer en el Boletín de Matemáticas, Vol. VII No. 1 .

[7] Bromwich T. J. *An Introduction to the theory of Infinite Series*, Second Ed. pp. 202 - 208, Mc Millan, London, 1955 .

* * *