Boletín de Matemáticas
Vol. IV Nº 4 pp. 10-13

UN PROBLEMA ACERCA DE LA BARAJA

FRANCISCO LLERAS

Un naipe ordenado de n cartas (n par) se baraja idealmente "partiéndolo" exactamente por la mitad, en forma tal que la primera carta quede de segunda después de barajarlo.

1. ¿Qué número de veces es necesario barajar el naipe para que vuelva a quedar ordenado ?

2. La carta que ocupaba la posición J, ¿en qué posición quedará después de k "barajadas"?

Veamos qué pasa con una carta cualquiera J al barajar la primera vez : se presentan dos casos :

a) Si se halla en la primera mitad del naipe ($J < n/2$) y si tenemos en cuenta que después de barajar cada carta de la primera mitad va a tener una anterior perteneciente a la segunda mitad, la posición final será entonces $2J$.

b) Si está en la segunda mitad ($J > n/2$) entonces su posición en la segunda mitad del naipe será $J - n/2$ y como cada carta, excepto la primera, tendrá una antecesora de la primera mitad del naipe, su posición final será: $(j-\frac{n}{2}).2-1$

o-sea : $2J-(n+1)$. En ambos casos la posición de J después de la barajada 1 es P_{j1} y cumple $P_{j1} \equiv 2J \quad [mod(n+1)]$.

En cada uno de los dos casos, P_{j2} tiene otra vez dos posibilidades así :

a) (1) $2^2 J$

(2) $(2J-n/2)\,2-1 = 2^2 J-(n+1)$

b) (1) $2^2 J-2(n+1)$

(2) $(2J-(n+1)-n/2)\,2-1 = 2^2 J-3(n+1)$

Es fácil observar que después de barajar k veces la posición final será una de dos :

(1) $2^k J$

(2) $2^k J-M(n+1)$

En donde $M(n+1)$ es el múltiplo de $(n+1)$ tal que $1 \leq 2^k J-M(n+1) \leq n$.

Caso general.

Sea P_{jk} la posición de la j-ésima carta después de barajar k veces. En virtud de lo anterior $P_{j,k+1} \equiv 2P_{jk} \; [mod\,(n+1)]$ y por recurrencia

$$P_{j,k+1} \equiv 2^{k+1} P_{jo} \equiv 2^{k+1} J \; [mod\,(n+1)]$$

Esto lo podemos expresar en la forma siguiente, llamando P_{jk} la posición final:

$$P_{jk} \equiv 2^k J \; [módulo\,(n+1)] \;\; y \;\; 1 \leq P_{jk} \leq n \qquad (B)$$

Esto es cierto para cualquier J , luego para la primera carta tendremos :

$$2^k \equiv P_{1k} \; [\; módulo \;\; (n+1) \;]$$

y por lo tanto para que vuelva al primer lugar tendremos :

$$2^k \equiv 1 \; [\; módulo \;\; (n+1) \;] \qquad (A)$$

De acuerdo con propiedades de las congruencias obtendremos que, para todo J , $P_{jk} \equiv J2^k \equiv J$ es decir que el k necesario para que la primera carta vuelva a su sitio establece que todas las otras cartas vuelvan también a su sitio o sea que el naipe quede nuevamente ordenado.

Es claro que el menor k que hace cumplir la congruencia (A) , es el menor número de veces que es necesario barajar el naipe para volver a su ordenación original.

La congruencia (B) nos permite conocer la posición de la carta J después de k barajadas.

Nota . Vale la pena observar que si bien al volver la primera carta a su posición original implica que todas vuelven a su posición original, la inversa no siempre es cierta, es decir que el hecho de que la carta J vuelva a la posición J **no** implica que al mismo tiempo la primera carta vuelva al primer puesto que si bien :

$$2^k \equiv 1 \; [\; mod. \; (n+1) \;] \Rightarrow J2^k \equiv J \; [mod. \;\; (n+1) \;]$$

Sin embargo

$$J2^k \equiv J\ [\,mod.\ (n+1)\,] \not\Leftrightarrow 2^k \equiv 1\ [\,mod.\ (n+1)\,]$$

a menos que J primo con $(n+1)$.

En otras palabras, es posible que la carta de posición J inicial, vuelva varias veces a su posición inicial antes de que la primera vuelva a su puesto, pero si la primera vuelve a su puesto, en este momento todas estarán en el orden inicial.

* * *

Axiomática y pedagogía

No hay duda de que algunos profesores realmente creen que la presentación axiomática deductiva es la esencia de las matemáticas. Sea que ellos deriven este limitado punto de vista de la instrucción por ellos recibida o sea que hayan sido inducidos a adoptarlo debido a que los textos ahora lo favorecen, son por lo menos sinceros si bien no pedagógicamente efectivos. Uno tiene la insidiosa sospecha de que unos pocos profesores gozan presentando el familiar sistema numérico en forma recónditamente axiomática porque si bien ellos saben la simple matemática que ello representa, pueden en cambio parecer presentando matemáticas profundas. En verdad gran parte del rigor en los textos modernos proviene de personas limitadas que buscan ocultar su superficialidad poniendo una fachada de profundidad a lo obvio y de pedantes que enmascaran su pedantería con el disfraz del rigor.

Morris Kline
New York University.