Boletín de Matemáticas
Vol. VI Nº 1, pp. 11 - 22.

SOBRE UNA PROPIEDAD GEOMETRICA DE LA FUNCION POLINOMICA DE GRADO n

FRANCISCO LLERAS

1. *Introducción.*

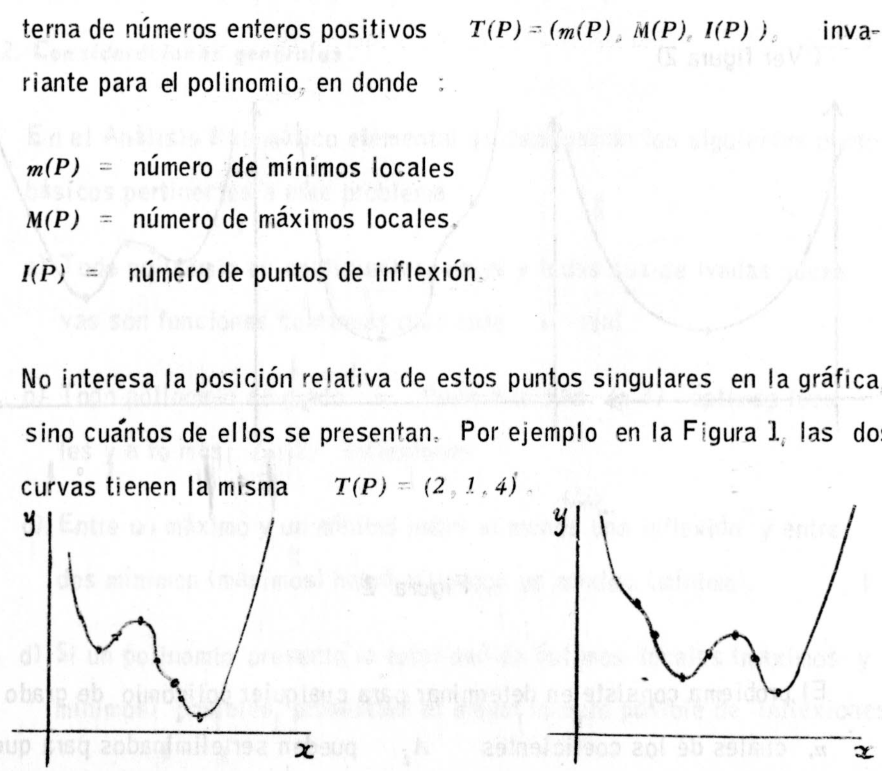
A un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales, podemos asociar una terna de números enteros positivos $T(P) = (m(P), M(P), I(P))$, invariante para el polinomio, en donde :

$m(P)$ = número de mínimos locales

$M(P)$ = número de máximos locales.

$I(P)$ = número de puntos de inflexión.

No interesa la posición relativa de estos puntos singulares en la gráfica, sino cuántos de ellos se presentan. Por ejemplo en la Figura 1, las dos curvas tienen la misma $T(P) = (2, 1, 4)$.



De ahora en adelante llamaremos a estos puntos singulares simplemente mínimos, máximos e inflexiones.

Si consideramos un polinomio cualquiera de grado n, $P_n(x) = \sum_{i=o}^{n} A_i x^i$ al dar diversos valores a los A_i obtendremos todas las formas posibles de las curvas correspondientes y por lo tanto todas las ternas posibles $\{T(P_n)\}$ cuyo conjunto es característico del polinomio de grado n.

Por ejemplo para el polinomio de 4º grado obtenemos

$$\{T(P_4)\} = \{(1,0,0),\ (1,0,2)\ (2,1,2)\}$$

(Ver figura 2)

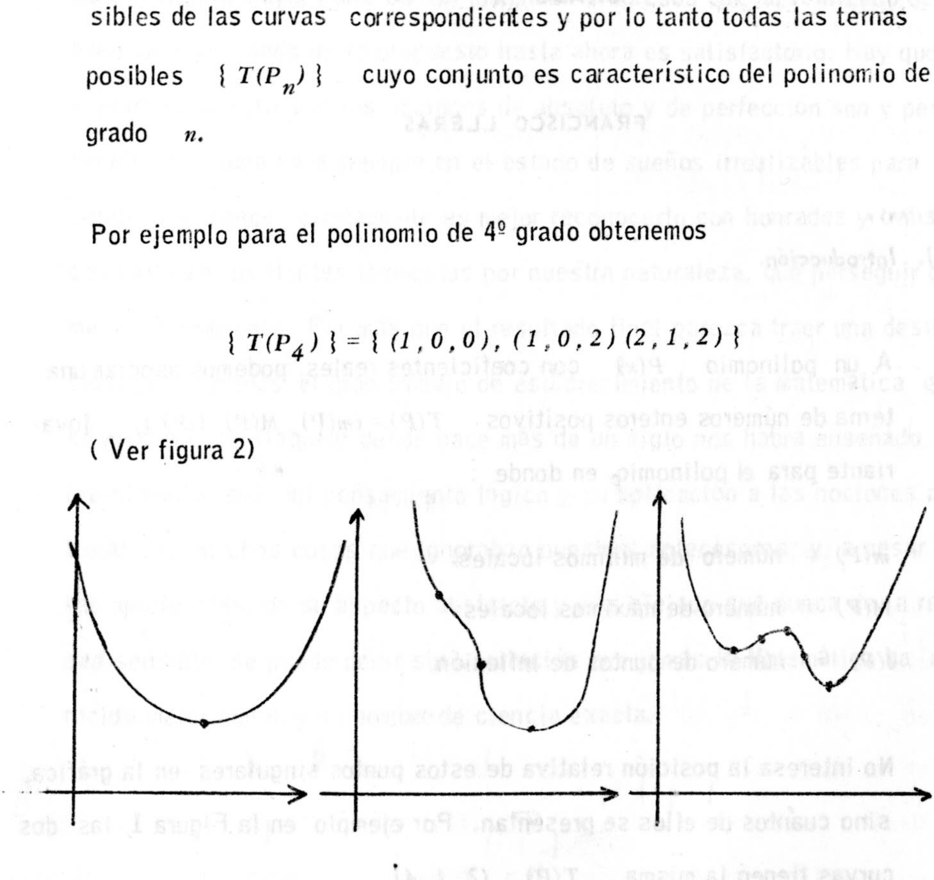


Figura 2

El problema consiste en determinar para cualquier polinomio de grado n, cuáles de los coeficientes A_i pueden ser eliminados para que con una adecuada escogencia de los restantes se puedan obtener la totalidad de las $T(P_n)$ características del polinomio, con la restricción adicional de que los puntos singulares correspondientes deben presentarse en una vecindad arbitrariamente pequeña del origen de coordenadas.

Sin perder generalidad podemos suponer que $A_n = 1$, ya que si dividimos por A_n todos los coeficientes del polinomio, lo único que hacemos es cambiar la escala vertical de la gráfica, sin alterar los valores de x para los cuales se presentan los puntos singulares en que estamos interesados. Es posible siempre eliminar el término independiente, $A_o = 0$, ya que esto equivale a desplazar verticalmente la gráfica sin alterar ninguna de las características geométricas de la curva.

2. *Consideraciones generales.*

En el Análisis Matemático elemental se demuestran los siguientes puntos básicos pertinentes a este problema :

a) Todo polinomio de coeficientes reales y todas sus derivadas sucesivas son funciones contínuas para todo x real.

b) Todo polinomio de grado n tiene a lo más $(n-1)$ óptimos locales y a lo más $(n-2)$ inflexiones.

c) Entre un máximo y un mínimo habrá al menos una inflexión y entre dos mínimos (máximos) habrá al menos un máximo (mínimo).

d) Si un polinomio presenta la totalidad de óptimos locales (máximos y mínimos) posibles, presentará el mayor número posible de inflexiones y entre un mínimo y el máximo subsiguiente habrá una y solamente una inflexión.

e) Todo polinomio de grado $2n$ tiene al menos un mínimo y todo polinomio de grado $(2n+1)$ tiene al menos una inflexión.

f) Todo polinomio de grado $2n$ si tiene raíces reales éstas serán en número par y si es de grado $(2n+1)$ tendrá al menos una raíz real y si tiene más de una, éstas serán siempre en número impar.

Como consecuencia de las consideraciones anteriores y teniendo en cuenta que los óptimos se presentan en los ceros de la primera derivada, y las inflexiones en los ceros de la segunda derivada, es fácil ver que los $T(Pn)$ posibles serán:

Para polinomios de grado $2n$:

$(1, 0, 0)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 0, 4)$ . . . . $(1, 0, (2n-2))$

$(2, 1, 2)$, $(2, 1, 4)$, $(2, 1, 6)$ . . . . $(2, 1, (2n-2))$

$(3, 2, 4)$, $(3, 2, 6)$, $(3, 2, 8)$ . . . . $(3, 2, (2n-2))$

. . . .

. . . .

$(n, (n-1), (2n-2))$

Lo cual podemos expresar así:

$T(P_{2n}) = (J, (J-1), (2K-2))$

$(J = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n)$

$(n \geqslant K \geqslant J)$

Para polinomios de grado $(2n + 1)$

$(0, 0, 1)$ $(0, 0, 3)$ $(0, 0, 5)$ . . . . $(0, 0, (2n - 1))$

$(1, 1, 1)$ $(1, 1, 3)$ $(1, 1, 5)$ . . . . $(1, 1, (2n - 1))$

$(2, 2, 3)$ $(2, 2, 5)$ $(2, 2, 7)$ . . . . $(2, 2, (2n - 1))$

. . . .

. . . .

$(n, n, (2n - 1))$

o sea :

$T(P_{2n+1}) = (J, J, (2K - 1))$

$(J = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$

$(n \geq K \geq J)$

$(K > 0)$

3. **Teorema.**

Para que en un polinomio de grado $n > 3$, con una adecuada esogencia de los coeficientes respectivos, se obtengan la totalidad de los $T(P_n)$ característicos y los puntos singulares correspondientes aparezcan en una vecindad arbitrariamente pequeña del origen de coordenados es suficiente que sea de la forma

$$P_n(X) = \frac{\alpha}{2} X^2 + \beta X + \sum_{i=0}^{[n/2]} A_i x^{(n-2i)}$$ donde $A_0 = 1$ y si

$(n - 2i) = 0$ entonces $A_i = 0$

Demostración

Siempre es posible construir un polinomio de grado n en donde los puntos singulares aparezcan en su totalidad y en una vecindad arbitrariamente pequeña del origen; en efecto sea la vecindad $[-\varepsilon, \varepsilon]$ basta con construir el polinomio $P_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ en donde las a_i se pueden tomar tales que $|\varepsilon| > |a_1| > |a_2| > |a_3| \ldots > |a_n|$ y en donde todos los a_i sean números reales. Dado que este polinomio tiene la totalidad de raíces reales y teniendo en cuenta las consideraciones generales de la sección 2, entonces todos los puntos singulares posibles estarán dentro del intervalo .

Como los coeficientes de los términos de grado inferior a n están dados, haciendo caso omiso de su signo, por la suma de los productos de las raíces tomadas una a una, dos a dos, tres a tres etc., es claro que lo anterior nos indica que si el coeficiente del término de grado n es la unidad, basta para garantizar el que los puntos singulares aparezcan en el intervalo arbitrariamente pequeño $[-\varepsilon, \varepsilon]$ que los A_i sean lo suficientemente pequeños .

Veamos ahora cómo en las siguientes funciones polinómicas de un grado cualquiera, dando a K, α, β valores convenientes es posible obtener todos los $T(P_n)$ característicos.

Para las funciones pares :

$$P_{2n}(x) = \frac{\alpha}{2} X^2 + \beta X + X^{2(n-K+1)} \prod_{i=1}^{(K-1)} (X^2 - a_i^2) \quad \text{definiendo} \quad \prod_{1}^{0} (\ ) = 1$$

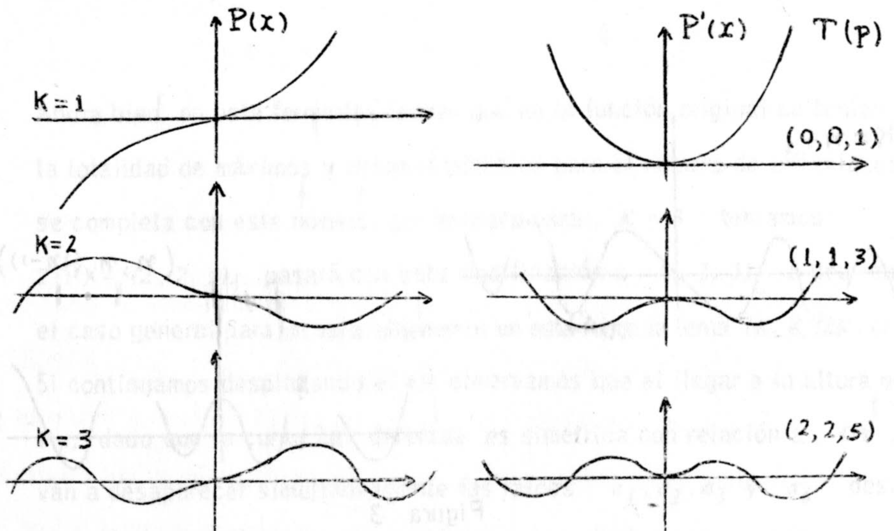
$(K = 1, 2, \ldots\ldots, n)$

y para las impares

$$P_{(2n+1)}(X) = \frac{\alpha}{2} X^2 + \beta X + X^{(2(n-K+1)+1)(K-1)} \prod_{i=1} (X^2 - a_i^2)$$

$(K = 1, 2, \ldots\ldots, (n+1))$

Analicemos el caso más complicado que es el correspondiente a los impares, al hacer variar a K y suponiendo que $\alpha = \beta = 0$ observamos que van apareciendo máximos y mínimos a lado y lado del eje OY y permaneciendo un punto de inflexión con tangente horizontal en $X = 0$ para $K \leq n$; cuando $K = n+1$ este punto de inflexión permanece pero la tangente deja de ser horizontal, no presentando la curva un aumento en el número de inflexiones sino solamente en el número de máximos y mínimos. Veamos la forma que va tomando para diversos valores de K y la forma de la curva derivada (Fig. 3).



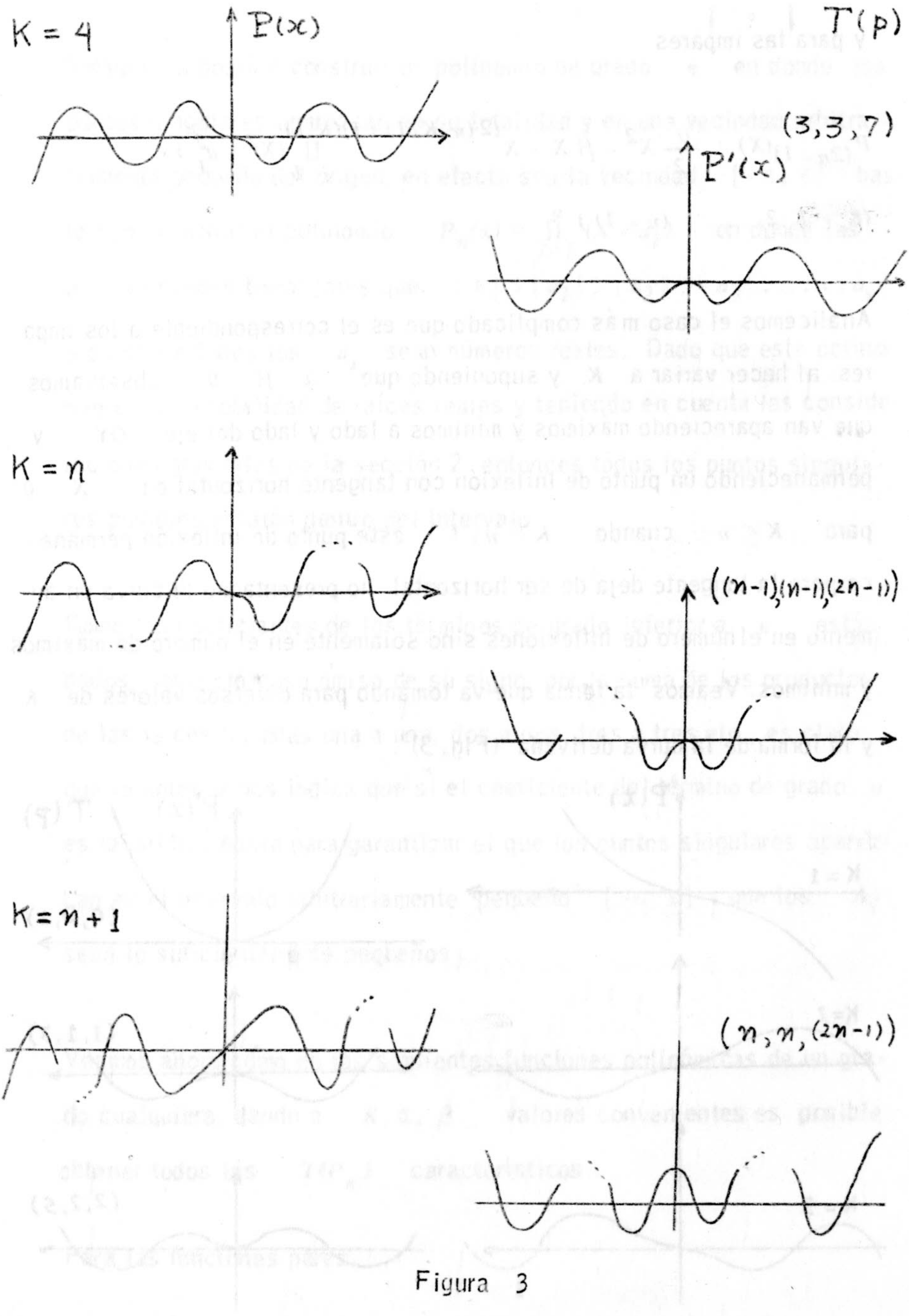


Figura 3

Observamos que si en la curva primera derivada desplazamos el eje hacia arriba o hacia abajo según el caso, desaparece la tangencia en el origen y aparecen dos raíces a lado y lado de este, correspondiendo esto a la aparición de un máximo y un mínimo en la función original, desapareciendo la tangencia horizontal en el punto de inflexión en O, ver Fig. 4 explicativa.

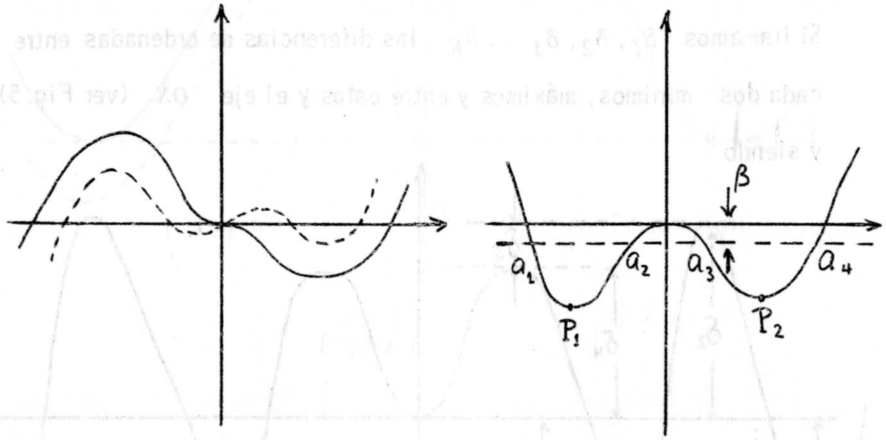


Figura 4

Ahora bien, en esta forma las ternas que en la función original no tenían la totalidad de máximos y mínimos posibles para el número de inflexiones, se completa con este número, por ejemplo para $K = 3$ teníamos $T(P) = (2, 2, 5)$, pasará con esta modificación a $(3, 3, 5)$ o sea en el caso general para un valor obtenemos en esta forma la terna $(K, K, (2K-1))$. Si continuamos desplazando el eje observamos que al llegar a la altura de P_1, dado que la curva 1a. derivada es simétrica con relación a OY, van a desaparecer simultáneamente las raíces a_1, a_2, a_3 y a_4 desapareciendo al mismo tiempo dos máximos y dos mínimos de la curva original, lo cual nos quita la posibilidad de aparición de todas las combinaciones posibles de ternas. Para obviar este inconveniente basta con "deformar" la curva 1a. derivada con las ordenadas de una recta $y = \alpha x$ que nos garantice la no desaparición de los máximos y mínimos de la curva original, veamos cómo:

Si llamamos $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_K$ las diferencias de ordenadas entre cada dos : mínimos, máximos y entre estos y el eje OX (ver Fig. 5), y siendo

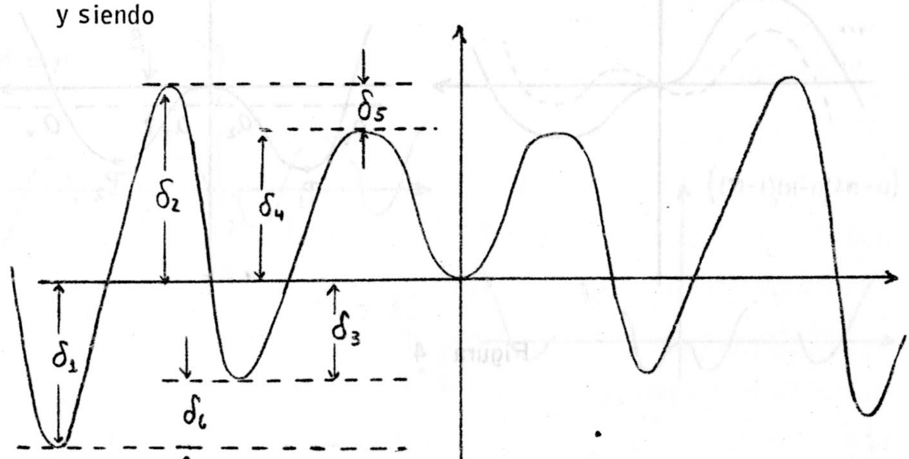


Figura 5

estos un número finito habrá uno de estos que sea el menor de todos, sea δ_i este menor; entonces si el valor máximo de αX en el intervalo $[-a_1, a_1]$ es menor que δ_i (o sea en cualquiera de los extremos) nos quedará garantizada la desaparición paulatina de todos los máximos y mínimos sin perturbar el número de estos en la curva original. (Ver Fig. 6) .

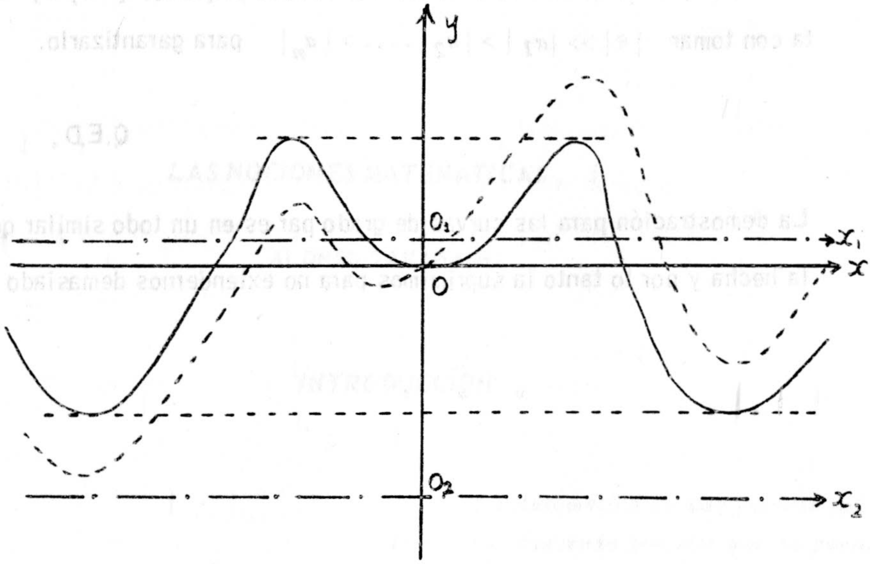


Figura 6

En esta forma podemos garantizar la desaparición paulatina de todos los máximos y mínimos de dos en dos al desplazar a OX digamos entre la posición O_1X_1 hasta O_2X_2 (este es el objeto precisamente que buscábamos anteriormente con el término βX en la función original).

Por lo tanto si a la función original le agregamos un término $\frac{\alpha}{2}X^2$ adecuado se logra dando valores convenientes a β obtener la totalidad de $T(P)$ para cada uno de los valores de K, bastando dar a K los valores desde 1 hasta $(n+1)$ para obtener la totalidad de los $T(P_n)$ característicos.

Es claro que los valores de $a_1\ a_2 \ldots a_n$ pueden escogerse para que todo esto suceda en el intervalo arbitrariamente pequeño $[-\varepsilon, \varepsilon]$ basta con tomar $|\varepsilon| >> |a_1| > |a_2| \ldots > |a_n|$ para garantizarlo.

Q.E.D.

La demostración para las curvas de grado par es en un todo similar que la hecha y por lo tanto la suprimimos para no extendernos demasiado.

* * *

La exactitud en Matemáticas.

"Desde mediados del siglo pasado, los matemáticos han estado más y y más ansiosos por alcanzar la exactitud absoluta. En ello tienen razón y esta tendencia se acentuará cada vez más. En matemáticas, la exactitud no lo es todo, pero sin ella no queda nada : una demostración a la cual le hace falta exactitud es absolutamente mala. Esta es una verdad que creo nadie discutirá pero, si se toma demasiado literalmente, nos conduce a la conclusión que antes de 1820, por ejemplo, no había matemáticas, y esto es claramente una exageración.

Henri Poincaré

Science and Method