

## CONSISTENCIA E INCONSISTENCIA EN LA MATEMATICA

(De un sistema axiomático deductivo )

por

RAFAEL MARIÑO SARMIENTO.

(1) Axiomas iniciales de la Geometría Euclidea.

Axioma 1. Toda recta es una proyección de puntos.

Axioma 2. Existen por lo menos 2 puntos .

Axioma 3. Para cada par de puntos diferentes, existe una única recta que los contiene.

Axioma 4. Para cada recta existe un punto por fuera de ella.

Axioma 5. Para cada recta y cada punto por fuera de la recta, existe una única recta que contiene al punto y que no interseca la recta.

(2) Algunos teoremas que se pueden obtener a partir de los anteriores Axiomas.

Teorema 1. Para todo punto existe por lo menos dos rectas que lo contienen.

Teorema 2. Cada recta contiene por lo menos dos puntos.

Teorema 3. Por lo menos existen cuatro puntos diferentes.

Teorema 4. Por lo menos existen seis rectas diferentes.

(3) Los Axiomas (1) los podemos escribir sin usar las palabras punto y recta.

Asumiremos dos conjuntos que notaremos  $P$  y  $R$  , y tales que :

Axioma 1. Todo elemento de  $R$  es un subconjunto de  $P$ .

- Axioma 2.  $P$  tiene por lo menos dos elementos diferentes.
- Axioma 3. Para cada par de elementos diferentes  $P_1$  y  $P_2$  de  $P$  existe único  $R \in \mathcal{R}$  tal que  $p_1 \in R$  y  $p_2 \in R$ .
- Axioma 4. Para cada  $R \in \mathcal{R}$  existe un  $p \in P$  tal que  $p \in R$ .
- Axioma 5. Para cada  $R \in \mathcal{R}$  y cada  $p \in P$  tal que  $p \in R$ , existe un único  $R_1 \in \mathcal{R}$  tal que :

$$p \in R_1 \quad \text{y}$$

$$R \cap R_1 = \phi$$

(4) Los teoremas de (2) se podrían escribir.

Teorema 1. Para cada  $p \in P$ , existen  $R_1 \in \mathcal{R}$  y  $R_2 \in \mathcal{R}$  tal que  $p \in R_1$  y  $p \in R_2$

Teorema 2. Para cada  $R \in \mathcal{R}$  existen  $p_1 \in P$  y  $p_2 \in P$  tal que  $p_1 \in R$  y  $p_2 \in R$ .

Teorema 3. Existen  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  diferentes y tales que  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$ .

Teorema 4. Existen  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  y  $R_6$  diferentes y tales que  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 \in \mathcal{R}$

(5) Metateorema 1. El sistema de 5 axiomas de (1) (o de (3)) es consistente.

Demostración.  $P = \{a, b, c, d\}$  y

$\mathcal{R} = \{R, S, T, U, V, W\}$ , con

$R = \{a, b\}$      $U = \{b, c\}$

$S = \{a, c\}$      $V = \{b, d\}$

$T = \{a, d\}$      $W = \{c, d\}$

es un modelo para tal sistema.

(6) Presentación Axiomática de los Números Reales.

Se llaman números reales a los elementos de un conjunto  $R$  con dos operaciones  $+$  (adición) y  $\cdot$  (multiplicación) y con dos elementos diferentes  $0$  y  $1$  de tal manera que :

Axioma 1. La adición es asociativa.

Axioma 2. La adición tiene elemento neutro (que es el  $0$ ).

Axioma 3. La adición es invertida.

Axioma 4. La adición es conmutativa.

Axioma 5. La multiplicación es asociativa.

Axioma 6. La multiplicación tiene elemento neutro (que es el  $1$ ).

Axioma 7. La multiplicación es invertida.

Axioma 8. La multiplicación es conmutativa.

Axioma 9. La multiplicación es distributiva.

Axioma 10. Asumiremos la existencia de un subconjunto  $R_+$  de  $R$  tal que si  $a, b \in R_+$  entonces  $a + b \in R_+$  y  $a \cdot b \in R_+$ .

Axioma 11. Para todo real  $a$ ,  $a \neq 0$ , o  $a \in R_+$  o  $a \in R_-$  (pero no ambas cosas)

Axioma 12.  $0 \in R_+$

Axioma 13. Si definimos  $a \leq b$  como  $b - a \in R_+$  o  $a = b$ , se tiene que para todo subconjunto  $S \subseteq R$ ,  $S \neq \emptyset$  y tal que exista  $c \in R$  con  $x \leq c$  para todo  $x \in S$ , existe un elemento  $s \in R$  tal que :

(i)  $x \leq s$  para todo  $x \in S$  y

(ii)  $s \leq b$  para todo  $b \in R$  tal que  $x \leq b$  para todo  $x \in S$ .

(7) Metateorema 2. Los primeros nueve axiomas anteriores son consistentes

**Demostración.** Si  $R = \{0, 1\}$  con las dos operaciones  $+$  y  $\cdot$  definidas por:

$+$	$0$	$1$
$0$	$0$	$1$
$1$	$1$	$0$

$\cdot$	$0$	$1$
$0$	$0$	$0$
$1$	$0$	$1$

es consistente.

**Metacorolario.** No es posible usando solamente los nueve primeros axiomas, demostrar que existan números reales fuera de  $0$  y  $1$ . Tampoco es posible demostrar que  $0$  sea el único real igual a su inverso aditivo.

(8). Si reemplazamos el Axioma 5 de (1) (o de (3)) por el Axioma 5 para cada recta y cada punto por fuera de la recta, no existe ninguna recta que contenga al punto y que no intersekte a la recta. La geometría que así se obtiene se dice que es no Euclídeana.

**Metateorema 3.** Si la Geometría Euclídeana es consistente, la Geometría no Euclídeana a la que nos acabamos de referir, también es consistente.

**Demostración.** Si interpretamos punto como parejas de puntos sobre una superficie esférica y diametralmente opuestas (el segmento que los une pasa por el centro de la esfera) y rectas como conjuntos de puntos (como acabamos de interpretar "puntos") de tal manera que el conjunto forme un círculo máximo de la superficie esférica, ésta interpretación es un modelo de la Geometría no-Euclídeana a que se refiere este metateorema.

(9) **Metateorema 4.** Si la aritmética de los números reales (el sistema de (6)) es consistente, la Geometría Euclídeana también lo es.

**Demostración.** Se interpreta punto como pareja de números reales y recta como conjunto de parejas de reales  $(x, y)$  tales que

$$ax + by + c = 0 \quad \text{para algunas constantes } a, b \text{ y } c.$$

REGRAS A LOS PROGRAMAS DE ARITMÉTICA DEL PRIMERO Y SEGUNDO  
SOLUCIONES PARA ESTABLECER LA UNIDAD  
Y ALGEBRA DE TERCERO

La noción de conjunto... Relaciones entre conjuntos...  
Gráficas...  
Presentada por el Departamento de Matemáticas del Colegio...  
de Cali, en el IV Congreso Nacional de Matemáticas...  
# # # # #  
Junta del 5 al 15 de Octubre de 1970.

Operaciones entre conjuntos...  
La necesidad de una revisión permanente de los programas oficiales...  
crítica realizada de los profesores en relación con las fallas de dichos programas y la propia experiencia en el manejo de los mismos son los factores de terminación que nos mueven a presentar esta propuesta.

Nota: Aunque presentamos los nuevos programas, queremos hacer algunas consideraciones en relación con los diferentes aspectos y características que deben tener los mismos...  
CAPÍTULO III

Ordenación de los conceptos, de acuerdo a una línea de desarrollo clara y precisa, meta importante en relación con este punto es la unidad conceptual que debe buscarse, el desarrollo armónico y gradual de los programas, evitando el empleo de conceptos y cambios numéricos cuya necesidad y fundamentación no sea aún evidente...  
CAPÍTULO IV