CONSISTENCIA E INCONSISTENCIA EN LA MATEMATICA

(De un sistema axiomático deductivo)

por

RAFAEL MARIÑO SARMIENTO.

(1) Axiomas iniciales de la Geometría Euclideana.

Axioma 1. Toda recta es una proyección de puntos.

Axioma 2. Existen por lo menos 2 puntos .

Axioma 3. Para cada par de puntos diferentes, existe una única recta que los contiene.

Axioma 4. Para cada recta existe un punto por fuera de ella.

Axioma 5. Para cada recta y cada punto por fuera de la recta, existe una única recta que contiene al punto y que no intercecta la recta.

(2) Algunos teoremas que se pueden obtener a partir de los anteriores Axiomas.

Teorema 1. Para todo punto existe por lo menos dos rectas que lo contienen.

Teorema 2. Cada recta contiene por lo menos dos puntos.

Teorema 3. Por lo menos existen cuatro puntos diferentes.

Teorema 4. Por lo menos existen seis rectas diferentes.

(3) Los Axiomas (1) los podemos escribir sin usar las palabras punto y recta.

Asumiremos dos conjuntos que notaremos P y R y tales que

Axioma 1. Todo elemento de R es un subconjunto de P.

Axioma 2. P tiene por lo menos dos elementos diferentes.

Axioma 3. Para cada par de elementos diferentes P_1 y P_2 de P existe único $R \in \mathbf{R}$ tal que $p_1 \in R$ y $p_2 \in R$.

Axioma 4. Para cada $R \in \mathbf{R}$ existe un $p \in P$ tal que $p \in R$.

Axioma 5. Para cada $R \in \mathbf{R}$ y cada $p \in P$ tal que $p \in R$, existe un único $R_1 \in \mathbf{R}$ tal que:

$$p \in R_1 \quad \text{y}$$

$$R \quad R_1 = \phi$$

(4) Los teorema de (2) se podrían escribir.

Teorema 1. Para cada $p \in P$, existen $R_1 \in \mathbf{R}$ y $R_2 \in \mathbf{R}$ tal que $p \in R_1$ y $p \in R_2$

Teorema 2. Para cada $R \in \mathbf{R}$ existen $p_1 \in P$ y $p_2 \in P$ tal que $p_1 \in R$ y $p_2 \in R$.

Teorema 3. Existen p_1, p_2, p_3 y p_4 diferentes y tales que $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$.

Teorema 4. Existen R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 y R_6 diferentes y tales que $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 \in \mathbf{R}$

(5) Metateorema 1. El sistema de 5 axiomas de (1) (o de (3)) es consistente.

Demostración. $P = \{ a, b, c, d \}$ y

$\mathbf{R} = \{ R, S, T, U, V, W,$ con

$R = \{ a, b \} \quad U = \{ b, c \}$

$S = \{ a, c \} \quad V = \{ b, d \}$

$T = \{ a, d \} \quad W = \{ c, d \}$

es un modelo para tal sistema.

(6) Presentación Axiomática de los Números Reales.

Se llaman números reales a los elementos de un conjunto R con dos operaciones $+$ (adición) y (multiplicación) y con dos elementos diferentes 0 y 1 de tal manera que :

Axioma 1. La adición es asociativa.
Axioma 2. La adición tiene elemento neutro (que es el 0).
Axioma 3. La adición es invertida.
Axioma 4. La adición es conmutativa.
Axioma 5. La multiplicación es asociativa.
Axioma 6. La multiplicación tiene elemento neutro (que es el 1).
Axioma 7. La multiplicación es invertida
Axioma 8. La multiplicación es conmutativa.
Axioma 9. La multiplicación es distributiva.
Axioma 10. Asumiremos la existencia de un subconjunto R_+ de R tal que si $a, b \in R_+$ entonces $a + b \in R_+$ y $b \in R_+$.

Axioma 11. Para todo real a, $a \neq 0$, o $a \in R_+$ o $a \in R_+$ (pero no ambas cosas).

Axioma 12. $0 \in R_+$

Axioma 13. Si definimos $a \leqq b$ como $b - a \in R_+$ o $a = b$, se tiene que para todo subconjunto $S \subseteq R$, $S \neq \emptyset$ y tal que exista $c \in R$ con $x \leqq c$ para todo $x \in S$, existe un elemento $s \in R$ tal que :

(i) $x \leqq s$ para todo $x \in S$ y

(ii) $s \leqq b$ para todo $b \in R$ tal que $x \leqq b$ para todo $x \in S$.

(7) Metateorema 2. Los primeros nueve axiomas anteriores son consistentes

Demostración. Si $R = \{ 0, 1 \}$ con las dos operaciones $+$ y $\cdot$ definidas por

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

	0	1
0	0	0
1	0	1

es consistente.

Metacorolario. No es posible ,usando solamente los nueve primeros axiomas, demostrar que existan números reales fuera de 0 y 1. Tampoco es posible demostrar que 0 sea el único real igual a su inverso aditivo.

(8). Si reemplazamos el Axioma 5 de (1) (o de (3)) por el Axioma 5 para cada recta y cada punto por fuera de la recta, no existe ninguna recta que contenga al punto y que no intersecte a la recta. La geometría que así se obtiene se dice que es no Euclideana.

Metateorema 3. Si la Geometría Euclideana es consistente, la Geometría no Euclideana a la que nos acabamos de referir, también es consistente.

Demostración. Si interpretamos punto como parejas de puntos sobre una superficie esférica y diametralmente opuestas (el segmento que los une pasa por el centro de la esfera) y rectas como conjuntos de "puntos" (como acabamos de interpretar "puntos") de tal manera que el conjunto forme un círculo máximo de la superficie esférica, ésta interpretación es un modelo de la Geometría no Euclideana a que se refiere este metateorema.

(9) Metateorema 4. Si la aritmética de los números reales (el sistema de (6)) es consistente, la Geometría Euclideana también lo es.

Demostración. Se interpreta punto como pareja de números reales y recta como conjunto de parejas de reales (x, y) tales que $ax + by + c = 0$ para algunas constantes a, b y c.

# # # # # # # #