ESTADISTICA EN BACHILLERATO

ENRIQUE LEON QUERUZ
Universidad Nacional.

INTRODUCCION.

Debido a la necesidad e importancia que en las actividades del hombre actual tiene la aplicación del Método Estadístico, es aconsejable otorgarle a dicha ciencia un mínimo de dedicación a su enseñanza elemental, en el bachillerato Además, teniendo en cuenta que otras disciplinas como Física, Química, Matemáticas, Biológicas, Filosofía, etc., tienen en el nivel medio una buena introducción, permitiendo al estudiante conocer sus conceptos para que al llegar a la Universidad pueda facilitársele la comprensión de muchos tópicos; esta situación tiene como consecuencia que, a nivel universitario, puedan considerarse programas más extensos en las disciplinas mencionadas

Esto no ocurre con la Estadística En la actualidad la mayoría de las carreras universitarias, con muy pocas excepciones, tienen en sus programas el desarrollo de conceptos estadísticos aplicados Estos conceptos son, hasta cierto punto, ambiciosos en el sentido de la cantidad de temas que abarcan, con muchas limitaciones de tiempo Si en el nivel medio se considerara el desarrollo de un contenido mínimo de Estadística, como consecuencia inmediata se obtiene que podría facilitarse el desarrollo, a nivel universitario, de los temas de Estadística Pues ya el estudiante estaría en condiciones de asimilar mejor y más rápidamente ciertos conceptos básicos fundamentales Así se podría pensar en insistir más en temas específicos muy aplicados a cada profesión

De acuerdo con la filosofía de los INEM y especialmente en el ramo de la matemática, "se desea la formación de hábitos de orden y precisión, y la estructuración de la mente del educando, utilizando los métodos de razonamiento intuitivo, inductivo y deductivo". Se ha dado un paso al considerar algunos tópicos de Estadística en dicho programa. Esto presenta la oportunidad de dar una buena aplicación al Método Científico. Además ofrece la oportunidad de aplicar muchos conceptos de matemáticas, especialmente en lo que a Teoría de Conjuntos se refiere. Dentro de la consideración de los temas de Estadística se han contemplado parte de Estadística Descriptiva y algunas Nociones de Probabilidad, desarrollado siempre en forma elemental.

CONTENIDO.

De acuerdo con lo anterior, un resumen de los temas contemplados sería el siguiente:

I. NOCIONES BASICAS PRELIMINARES.

1. Definición. Importancia. Objetivos. 2. Variables. 3. Unidad Estadística, características. 4. Población, Muestra.

II. PRESENTACION DE LOS DATOS.

1. Datos originales. 2. Datos agrupados o Distribuciones de Frecuencias.

III. REPRESENTACION GRAFICA.

IV. ANALISIS ELEMENTAL DE LOS DATOS ESTADISTICOS.

1. Medidas de la Tendencia Central.

a. Media Aritmética. b. Mediana. c. Modo o Moda.

2. Medidas de la Dispersión.

a. Varianza. b. Desviación típica. c. Coeficiente de Variación.

V. NOCIONES DE PROBABILIDAD.

1 Suceso aleatorio; experimento aleatorio. 2 Espacio Muestral o conjunto universal; el suceso aleatorio como subconjunto del espacio muestral. 3 Definición clásica de probabilidad inconvenientes. 4 Sucesos: Imposible (o conjunto vacío). Seguro (o conjunto universal), Contrario (o complemento. 5 Sucesos aleatorios mutuamente excluyentes o incompatibles (conjuntos disjuntos). 6. La probabilidad como función de conjuntos. 7 Probabilidad condicional, independencia de sucesos aleatorios. 8 Distribuciones de probabilidad. Funciones de cuantía y de densidad, propiedades, relaciones con el caso empírico. 9. Esperanza matemática o media y varianza de distribuciones de probabilidad. 10 Distribuciones binomial y normal, definiciones, propiedades, aplicaciones.

Con el anterior programa se debe tratar de conseguir enfocar al estudiante hacia la parte aplicada, utilizando los elementos de matemáticas con que se cuenten al desarrollar los temas. Lógicamente todo lo anterior tratado en la forma más elemental posible y siempre con muestras o subconjuntos de poblaciones. El desarrollo de los temas anteriores debe considerarse de una manera similar a la siguiente, aún cuando está bastante resumido, sin desear de mi parte establecer una norma rígida para ello:

NOCIONES BASICAS PRELIMINARES.

Debe tratarse en esta parte de clarificar y dejar bien precisos conceptos que serán utilizados a lo largo del curso.

DEFINICION 1.

Según el autor inglés A. Mood "La Estadística es la Tecnología del Método Científico".

Se sabe también que los tres aspectos principales del método científico son:

1. Ejecución del experimento
2. Obtención de conclusiones objetivas a partir de los experimentos.
3. Construcción de Leyes que simplifiquen la descripción de conclusiones fundadas en amplias clases de experimentos ,recordando que los experimentos científicos suelen hallarse por el proceso lógico de generalización a partir de resultados particulares. Esto es lo que en Estadística se conoce como Inferencia y es una clásica aplicación del método inductivo. Por eso de una determinada colectividad, la Estadística la estudiará con el fin de obtener conclusiones válidas solamente para la totalidad de los elementos de dicha colectividad y en ningún caso se puede particularizar. Conociendo estas situaciones en una parte del total (o población) puede inducirse o estimarse lo que ocurriría en la totalidad de los elementos.

DEFINICION 2.

Una POBLACION o UNIVERSO es el conjunto de todos los elementos posibles que poseen la característica (o las características) de interés para el estudio.

DEFINICION 3.

Una MUESTRA es una parte o un subconjunto de la población, obtenida de tal manera que sea representativa de ella.

El número de Elementos de la muestra (n) se llama TAMAÑO DE MUESTRA o total de observaciones.

DEFINICION 4.

Se llama VARIABLE al resultado obtenido al medir o contar, en cada elemento de la muestra o población, la característica (o las características) que interesa para el estudio. Es muy frecuente utilizar las letras X ó Y para representarla.

DEFINICION 5.

VARIABLE DISCRETA es aquella que se obtiene si al medir o contar la característica, ésta no admite subdivisiones pues perdería su naturaleza. O sea que $X \in Z$ ó $Y \in Z$.

DEFINICION 6.

VARIABLE CONTINUA es aquella que se obtiene si al medir o contar la característica, ésta admite subdivisiones sin perder su naturaleza. Es decir que $X \in R$ ó $Y \in R$.

DEFINICION 7.

La determinación de lo que interesa al estudio caracteriza lo que se conoce como UNIDAD ESTADISTICA. Esta unidad estadística debe cumplir con las siguientes condiciones :

a. Pertenecer al orden de los colectivos.
b. Ser definida en forma clara y precisa.
c. No estar determinada en forma subjetiva.

Por otra parte es conveniente aclarar la utilización incorrecta de ciertos términos como : Estadística, Estadístico, Estadísticas y Estadígrafo. Por eso deben establecerse sus diferencias. Por Estadística se entiende la ciencia misma ; Estadístico el profesional en Estadística ; estadísticas son series de valores sobre un mismo fenómeno colectivo y Estadígrafo es un parámetro o medida que se obtiene

PRESENTACION DE LOS DATOS.

DEFINICION 8.

Por DATOS ORIGINALES se entiende la presentación del valor de la característica medida en los elementos de la muestra, tal como se presentan.

Es de norma general reservar la variable **X** para el caso de datos originales y como se poseen n elementos en la muestra se utiliza el subíndice i $(1 : 1, 2, 3, \ldots, n)$ para cada observación o elemento de dicha muestra. Así obtenemos :

$$X_i : X_1 , X_2 , \ldots , X_n$$

DEFINICION 9.

Por DATOS AGRUPADOS se entiende la consideración de los valores diferentes de X_i con el correspondiente número de veces que se repiten.

Es costumbre reservar la letra **Y** para representar la variable agrupada Aún cuando en el caso anterior no se hacía notar, pues no se necesita, para datos agrupados hay que tener en cuenta dos maneras de presentación, debido a las variables discreta y contínua con que se cuenta. Como se está trabajando con muestras y siempre que se haga así, realmente la variable que se presentará será la discreta y la contínua se presentará pero en forma simbólica .

En CASO QUE LA VARIABLE SEA DE TIPO DISCRETO utilizaremos el símbolo $Y_j \, (j \cdot 1, 2, 3, \ldots, m)$ y nos representará cada valor diferente de X_i, siendo m el número de dichos valores diferentes y j el orden de ellos. Como $Y_j \cap Y_k = \phi, \; \forall j \neq k$, estamos haciendo una participación de los elementos de la muestra o del subconjunto de la población Para este caso m también representa el número de clases En líneas anteriores se habló de repeticiones lo que para datos agrupados establece la existencia de frecuencias

DEFINICION 10.

Las FRECUENCIAS ABSOLUTAS o repeticiones (n_j; para j: 1, 2, . . . , m) representan el número de veces que se repiten los valores Y_j.

De esta definición se puede observar que $(\forall_j)(n_j \in N)$.

TEOREMA 1.

$$\sum_{j=1}^{m} n_j = n$$

DEFINICION 11.

Las FRECUENCIAS RELATIVAS (h_j ; para $j: 1, 2, \ldots m$) se definen como las relaciones existentes entre cada frecuencia absoluta y el tamaño de muestra. Es decir :

$$h_j \overset{def}{=} \frac{n_j}{n} \quad (\text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, m)$$

TEOREMA 2.

$$(\forall_j)(0 \leq h_j \leq 1)$$

TEOREMA 3.

$$\sum_{j=1}^{m} h_j = 1$$

DEFINICION 12.

Definición CLASICA de probabilidad. La probabilidad de que ocurra un suceso A es igual a la relación existente entre el número de casos favo rables a dicho suceso (m) y el número de casos posibles (n), si todos son igualmente posibles. Es decir

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Según esta definición, si n se considera que todos los valores muestrales son igualmente posibles y teniendo que n_j es el número de casos favorables al valor Y_j y n el número de casos posibles, la relación

$$b_j = \frac{n_j}{n}$$

nos indicará la probabilidad de elegir el valor Y_j dentro de la muestra ; es por esto que a la Frecuencia Relativa se le considera como probabilidad empírica .

DEFINICION 13 .

FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS (N_k, si $k \leq m$)

$$N_k \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{k} n_j \; .$$

Según esto, si $k \leq m$, entonces

$N_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n(y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_k)$, pues $y_j \cap y_k = \phi$ $\forall_j \neq k$, o sea que una frecuencia absoluta acumulada nos representa el número de elementos que en la muestra poseen a lo sumo el valor Y_k.

TEOREMA 4 .

$$N_m = n$$

TEOREMA 5 .

$$n_1 = N_1 \leq N_2 \leq N_3 \leq \ldots \leq N_m = n$$

DEFINICION 14 .

FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS $(H_k,\ \text{si}\ \ k \leq m)\ \ H_k \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{k} b_j$

Así que,

$$H_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$$

y como

$$b_j = P(y_j),\ (\forall_j) \quad \text{y además} \quad y_j \quad y_k = \phi,\ \ \forall_j \neq k$$

entonces

$$H_k = P(y_1) + P(y_2) + \ldots\ P(y_k) = P(y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_k)$$

siendo H_k la probabilidad empírica de que se presente a lo sumo el valor Y_k dentro de la muestra .

TEOREMA 6 .

$$H_m = 1$$

TEOREMA 7 .

$$H_k = \frac{N_k}{n}$$

TEOREMA 8 .

$$b_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \ldots \leq H_m \leq 1$$

Todo lo anterior puede ser consignado en un cuadro de la siguiente manera

Valores Dife.	Frecuencias Absolutas	Frecuencias Absolutas Acumuladas	Frecuencias Relativas	Frecuencias Relativas Acumuladas
y_j	n_j	N_j	h_j	H_j
y_1	n_1	N_1	h_1	H_1
y_2	n_2	N_2	h_2	H_2
- - -	- - -	- - -	- - -	- - -
y_m	n_m	$N_m = n$	h_m	$H_m = 1$
	n		1	

En caso que la variable sea de TIPO CONTINUO, al agruparla hay que considerar ciertos intervalos semi-abiertos, que se denominan también clases siendo m en total. Así, lo que se hace es una partición del tipo

$$[\, y'_{j-1}, \; y'_j \,] \bigcap [\, y'_{k-1}, \, y'_k \,] \; , \; \forall_k \neq j$$

Para agrupar los datos en el intervalo se consideran los elementos de X_i tales que

$$y'_{j-1} \leq X_i < y'_j$$

DEFINICION 15.

El menor valor del intervalo se denomina LIMITE INFERIOR y se simboliza

DEFINICION 16.

El LIMITE SUPERIOR de un intervalo, cuyo símbolo es el Límite Inferior

$(j + 1)$ - ésimo intervalo. Como en la mayoría de los casos se necesitará una medida que represente en la mejor forma dicho intervalo, esta será lo que llamaremos punto medio o marca de clase.

DEFINICION 17.

El PUNTO MEDIO O MARCA DE CLASE, cuyo símbolo será Y_j, es la semisuma de los límites. Es decir

$$Y_j = \frac{Y'_j + Y'_{j-1}}{2}$$

Como se puede observar es punto medio va a coincidir hasta en símbolos, con el valor diferente de la Variable al agruparla, en el caso de Variable discreta. O sea se transforma la variable contínua en discreta.

DEFINICION 18.

La AMPLITUD DEL INTERVALO de la clase C_j es la diferencia entre los límites superior e inferior de cada clase, es decir

$$C_j = Y'_j - Y'_{j-1} .$$

En la mayoría de los casos C es constante, pero puede ser variable.

TEOREMA 9. $$Y_j = Y'_{j-1} + \frac{C_j}{2} = Y'_j - \frac{C_j}{2}$$

En estos conceptos es donde está la diferencia entre la presentación de los datos cuando la variable es discreta o contínua. Las frecuencias siguen conservando sus definiciones, significado y relaciones. Al resumir lo anterior en un cuadro, nos quedaría como en el Anexo 1.

REPRESENTACION GRAFICA.

En esta parte debe quedar bien clara la utilidad de la representación gráfica de los datos, como forma de descripción objetiva y apreciación rápida del fenó meno en estudio.

ANALISIS ELEMENTAL DE LOS DATOS.

Como se está trabajando con una colectividad es por eso que para observar sus características a simple vista ,no se puede. Debido a esto se utilizan medidas de síntesis que representen bien a dicho grupo. Como obtendremos diferentes situaciones, es por esto que se utilizan diferentes medidas. Lo que las caracteriza son sus ventajas y desventajas. Sinembargo aquí solo se mencionarán las más importantes .

DEFINICION 19.

Una MEDIDA DE LA TENDENCIA CENTRAL es un valor que nos indica hacia donde tratan de concentrarse los valores de la serie o su centro de gravedad.

DEFINICION 20.

La MEDIDA ARITMETICA o MEDIDA es :

a). En Datos originales $\overline{X} = M[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

b) En Datos agrupados $\overline{Y} = M[Y] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} Y_j\, n_j$

TEOREMA 10. PROPIEDADES DE LA MEDIDA ARITMETICA .

a) $M[X - \overline{X}] = 0$

b) $M[(X - \overline{X})^2]$ *es mínima*

c) Si k es constante ,entonces

1. $M[K] = K$
2. $M[KX] = K\,M[X]$

3. $M[X \pm K] = M[X] \pm K$

d) Si X y Y son variables, entonces

$$M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y].$$

El anterior teorema nos está indicando que la media es un operador lineal. Utilizando este teorema se pueden obtener los métodos abreviatidos de cálculo para la media aritmética en Datos Agrupados.

DEFINICION 21.

En Datos originales el MODO o MODA (Md) es el dato más frecuente de la serie.

TEOREMA 11. En datos agrupados

$$M_d = Y'_{k-1} + \frac{n_{k+1}}{n_{k+1} + n_{k-1}} C_k$$

siendo la k ésima clase la modal o sea aquella tal que n_k es la mayor de todas las frecuencias.

DEFINICION 22.

Si están ordenados, en Datos Originales, la MEDIANA (M_e) es igual:

a) Si n es impar, al dato central.

b) Si n es par a la semisuma de los dos datos centrales.

TEOREMA 12. En datos agrupados

$$M_\ell = Y'_{k-1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{k-1}}{n_k} C_k$$

siendo la k ésima clase, la que cuya N_j contiene el valor de $n/2$.

Para completar las medidas de la Tendencia central, necesitaremos de las Medidas de Dispersión. La utilización de estas medidas nos permitirá darle cierta confianza o desconfianza a la medida de síntesis correspondiente.

DEFINICION 23.

Las MEDIDAS DE DISPERSION representan, en promedio, lo que difieren los datos de la serie considerada de la Medida de la Tendencia central correspondiente.

DEFINICION 24.

La Varianza (S^2) es la media de los cuadrados de la diferencia de los valores de la serie y la media aritmética, es decir:

a) En Datos Originales $S^2 = V[X] = M[(X-\bar{X})^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

b) En Datos Agrupados $S^2 = V[Y] = M[(Y-\bar{Y})^2] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\bar{Y})^2 n_j$

DEFINICION 25.

La DESVIACION TIPICA es la raíz positiva de la Varianza. Es decir:

$$S = \sqrt{S^2}$$

TEOREMA 13. PROPIEDADES DE LA VARIANZA

a) $S^2 \geqslant 0$

b) Si k es constante, entonces

1. $V[K] = 0$
2. $V[X \pm K] = V[X]$
3. $V[KX] = K^2\, V[X]$

Estas propiedades de la varianza permiten establecer las fórmulas para calcularla, en forma abreviada, en datos agrupados. En algunos casos será conveniente la comparación de varias series. Ellas podrán, o no, tener las mismas unidades. Es por eso que se utiliza el coeficiente de variación.

DEFINICION 26. EL COEFICIENTE DE VARIACION (CV) es

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} \cdot 100$$

Según la definición anterior, y analizándola por la desviación típica, vemos que el coeficiente de variación tiende a cero cuando S tiende a cero, o sea cuando la diferencia entre los datos y la media tiende a ser nula, lo que significa que los datos tienden a ser constantes. Algo similar se puede hacer para analizar el significado del CV cuando S no tiende a cero. Según esto, el Coeficiente de Variación viene a representar la homogenidad o hetereogenidad entre los datos de una serie. Con el coeficiente de Variación se elimina la unidad utilizada, permitiendo poder comparar series con distintas unidades.

NOCIONES DE PROBABILIDAD.

En esta parte debe tratarse de buscar la aplicación de los elementos de teoría de conjuntos que posean, para facilitarles la situación y al mismo tiempo encontrar otra forma de aplicar esa teoría.

DEFINICION 27.

SUCESO ALEATORIO o de azar es aquel que está caracterizado por lo siguiente :

a) Sabemos que ocurre o podemos hacer que ocurra.
b) No sabemos el resultado que vamos a obtener.

Estos sucesos aleatorios originan los experimentos aleatorios, o sea aquellos que se realizan en base de sucesos aleatorios.

DEFINICION 28.

El ESPACIO MUESTRAL (E) o Conjunto Universal es conjunto de todos los resultados posibles al realizar un experimento aleatorio.

DEFINICION 29.

DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDAD (Ver Definición 12).

IEFINICION 30.

El SUCESO IMPOSIBLE (ϕ) o Conjunto Vacío, es aquel que nunca o curre.

TEOREMA 14.

$$P(\phi)=0.$$

DEFINICION 31.

El SUCESO SEGURO *(E)* o Conjunto Universal es aquel que siempre ocurre. Es el mismo espacio muestral.

TEOREMA 15.

$$P(E) = 1$$

DEFINICION 32 :

El SUCESO CONTRARIO (A') es el complemento del suceso aleatorio

TEOREMA 16.

$$P(A) + P(A') = 1.$$

DEFINICION 33 .

Dos sucesoa A y B son MUTUAMENTE EXCLUYENTES si

$$A \cap B = \phi$$

TEOREMA 17.

a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b Si A y B son mutuamente excluyentes entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

DEFINICION 34.

La probabilidad de que ocurra el suceso B , suponiendo que haya ocurri do el suceso A es $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ si $P(A) > 0$.

Esta es la PROBABILIDAD CONDICIONAL

De la misma manera se puede obtener $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ si $P(B) > 0$.

De las fórmulas anteriores se deduce que

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B).$$

DEFINICION 35.

Se dice que los sucesos A y B son INDEPENDIENTES, si

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{ó} \quad P(B/A) = P(B)$$

DEFINICION 36.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de Partes del Espacio Muestral. Entonces puede considerarse a la probabilidad como una función de conjunto, cuyo dominio es la clase $\mathcal{A}$ y su recorrido el intervalo $[0, 1]$. Es decir :

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1] \in R$$

DEFINICION 37.

Una DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD se forma al considerar todos y cada uno de los elementos E con sus correspondientes probabilidades. En símbolos nos queda algo así :

$$X_i \ : \ X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$$
$$p(X_i) : p(X_1), P(X_2), P(X_3) \cdots, P(X_n)$$

TEOREMA 18.

1. Si la variable es discreta

a) $p(X) \geq 0 \quad \forall X.$

b) $\sum p(X) = 1.$

2 Si la variable es contínua

a) $f(X) \geqslant 0 \quad \forall X,$

b) $\int f(X)\, dX = 1.$

DEFINICION 38.

La **FUNCION DE DISTRIBUCION** es igual a :

a) Si la variable es discreta

$$P(t) = \sum_{X=x_1}^{X=t} p(X).$$

b) Si la variable es contínua

$$F(X) = \int_{-\infty}^{t} f(X)\, dX.$$

Como se puede observar ,esta Función de Distribución es lo que en el caso empírico (muestras) se maneja como las Frecuencias Acumuladas Relativas.

DEFINICION 39.

En distribuciones de probabilidad se definen :

1. MEDIA TEORICA O ESPERANZA MATEMATICA (μ)

a) Si la variable es discreta :

$$\mu = E[X] = \sum X\, p(X)$$

b) Si la variable es contínua

$$\mu = E[X] = \int X f(X)\, dX.$$

2. **VARIANZA** (σ^2)

a) Si la variable es discreta $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum (X-\mu)^2 p(X)$

b) Si la variable es contínua

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int (X-\mu)^2 f(X)\, dX.$$

Con relación a las distribuciones **BINOMIALES** y **NORMAL** debe enfocarse la situación hacia el manejo práctico de las definiciones , propiedades, cálculo de probabilidades en base a ella, determinación de medias y varianza así como el manejo de tablas, especialmente para la normal.

Aún cuando en el proyecto INEM se ha contemplado la realización de los temas de Estadística Descriptiva y el de Nociones de Probabilidades como una parte del tema de Matemáticas en dos semestres distintos, debería pensarse en la asignación de un mayor número de horas para poder alcanzar un buen resultado en el desarrollo de los temas.

De todas maneras: la Asociación Colombiana de Estadística y el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia, están dispuestos a colaborar, de la mejor manera, con el fin de lograr el objetivo propuesto.

ANEXO 1

LIMITES		Puntos Medios	Frecuenc. Absolutas	Frecuenc. Absolut. Acumul.	Frecuen. Relativas	Frecuenc. Relativas Acumuladas
Y'_{j-1}	Y'_j	Y_j	n_j	N_j	h_j	H_j
Y'_0	Y'_1	Y_1	n_1	N_1	h_1	H_1
Y'_1	Y'_2	Y_2	n_2	N_2	h_2	H_2
Y_2	Y'_3	Y_3	n_3	N_3	h_3	H_3
Y'_{m-1}	Y'_m	Y_m	n_m	$N_{m=n}$	h_m	H_{m-1}
			n		1	