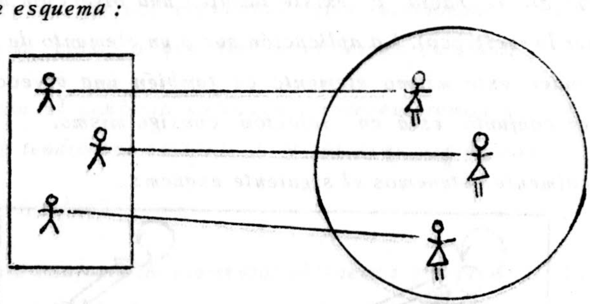
HACIA LOS NUMEROS

por

J. J. PAROT

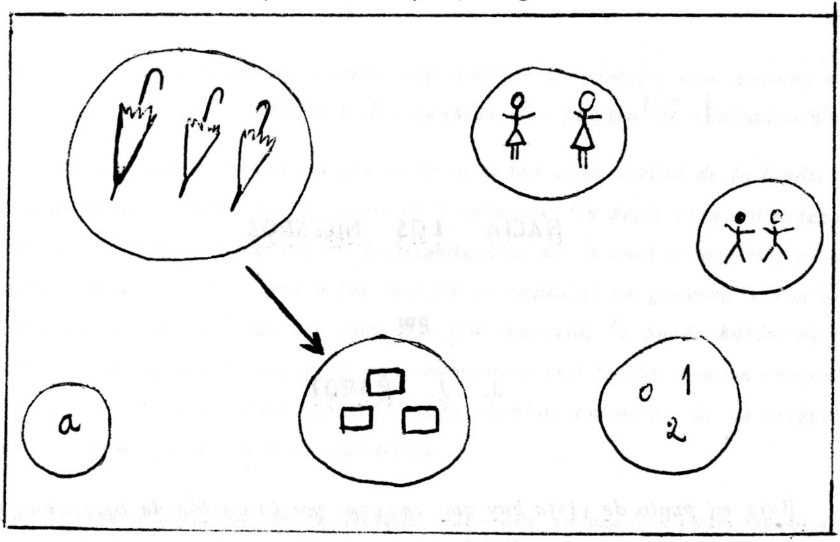
Bajo mi punto de vista hay que empezar por la noción de biyección. Esta no es una noción muy complicada puesto que se puede empezar a estudiarla en tercer Kinder por medio de juegos. Consideramos por ejemplo un conjunto de niños y un conjunto de niñas. Los ponemos a todos en fila : cada niño le da la mano a una njña y a una sola niña. Igualmente cada niña le da la mano a un solo niño y a un solo niño. Obtenemos así la situación que se puede representar con el siguiente esquema :



Si cada uno tiene su pareja, la relación entre los dos conjuntos es una biyección.

Desde luego podremos decir que los dos conjuntos tienen el mismo número de elementos o también (de manera más general) que tienen el mismo cardinal.

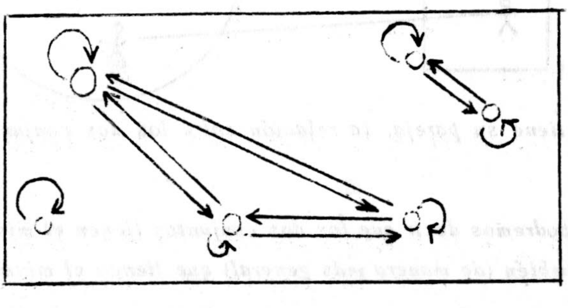
Consideremos el conjunto de conjuntos siguiente :



Pongamos una flecha de A hacia B en el caso de que exista una biyección entre los conjuntos A y B, en otras palabras, hagamos la representación sagital de la relación ' . . . está en biyección con . . . ' .

Pongamos luego todas las flechas posibles. Claro está que si existe una biyección de E hacia F existe también una biyección de F hacia E (que puede ser la recíproca). La aplicación que a un elemento de un conjunto le hace corresponder este mismo elemento es también una biyección. Desde luego, cualquier conjunto está en relación consigo mismo.

Finalmente obtenemos el siguiente esquema :



Tenemos entonces que :

1) Cada conjunto tiene una flecha consigo mismo lo que significa que la relación es reflexiva.

2) Si existe una flecha de E hacia F entonces existe también una flecha de F hacia E es decir que la relación es simétrica. $E \rightleftarrows F$.

3) Si existe de E hacia F y una flecha de F hacia G, entonces existe una flecha de E hacia G. Eso implica que la relación es transitiva

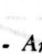
$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr] & \\ E \arrow[ur] \arrow[rr] & & G \end{tikzcd}$$

Como la relación es reflexiva, simétrica y transitiva decimos que es una relación de equivalencia.

Cuando hay una relación de equivalencia podemos considerar las clases de equivalencia. La clase de equivalencia de un elemento x es el conjunto de los elementos que están relacionados con x. Volvamos a considerar nuestra relación de equivalencia : si dos elementos están relacionados diremos que pertenecen a la misma clase o que tienen el mismo cardinal.

- Empecemos con el conjunto vacío que representaremos por $\emptyset$ o por $\{\ \}$. Este conjunto tendrá por cardinal 0, y entonces escribimos :

$$\text{Card}\ \{\ \} = 0$$

- Añadamos a este conjunto un elemento; obtenemos por ejemplo el conjunto {  } o el conjunto $\{0\}$. Podemos notar que entre esos conjuntos existe una biyección; desde luego pertenecen a la misma clase de equivalencia y tienen el mismo cardinal que escribiremos 1.

Card {  } = $\text{Card}\ \{0\} = 1$

- Convengamos en escribir 2 el cardinal de cualquier conjunto relacionado con $\{0, 1\}$,

o sea $\text{Card}\ \{0, 1\} = 2$

- Si añadimos un elemento a uno de esos conjuntos obtendremos por ejemplo $\{0,1,2\}$ y notaremos 3 el cardinal de este conjunto.

$$\text{Card}\ \{0,1,2\} = 3$$

- De este modo obtendríamos la siguiente sucesión:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

El problema es que si seguimos así necesitaremos tantos signos como clases de equivalencia haya. De ahí la necesidad de poner al punto un sistema de numeración que nos permita escribir el cardinal de cualquier conjunto.

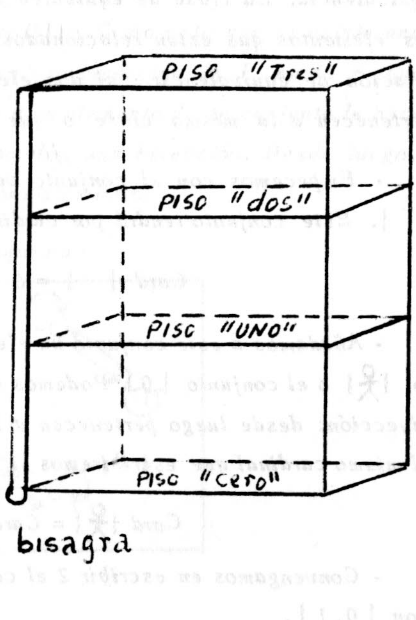
En la vida corriente estamos acostumbrados a utilizar el sistema de base diez, es decir que somos capaces de escribir el cardinal de cualquier conjunto utilizando solamente diez símbolos que son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Veamos cómo pensamos en la vida corriente. Sea un conjunto de bloques. El problema está en encontrar en la base diez, el cardinal de ese conjunto.

Por eso vamos a utilizar el contador que sirve para contar en todas las bases.

En el contador toda base se representa como un estante en el cual está fijada una tabla que gira alrededor de una bisagra.

Disponemos también de cajitas de plástico transparente.

OJO: Como en Francia, llamaremos piso cero el que en Colombia se llama primer piso; eso nos será necesario para introducir la noción de potencia.



Para encontrar, en base diez, el

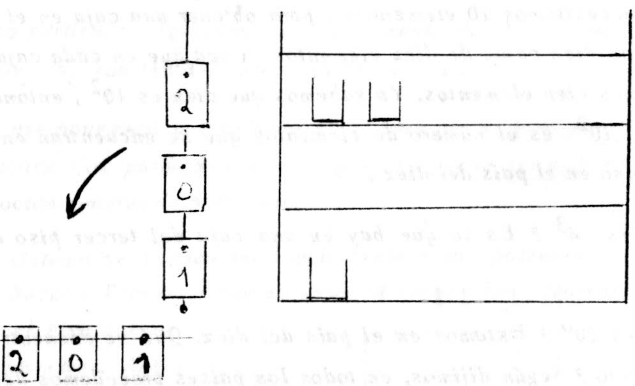
cardinal del conjunto de bloques, procederemos de la siguiente manera :

Tomamos un bloque y lo ponemos en una caja en el piso cero. Luego tomamos otro bloque y lo colocamos en otra caja, también en el piso cero. Hacemos la misma operación hasta que en el piso cero haya diez cajitas, entonces ponemos el contenido de estas diez cajas en una sola en el primer piso.

Seguimos así. Si en un momento llegamos a tener diez cajas en el primer piso, entonces vertimos el contenido de esas cajas en una sola caja que colocaremos en el segundo piso.

De un modo general, cuando haya diez cajas (que tengan elementos) en el piso n, vertiremos el contenido de esas cajas en una sola que colocaremos en el piso $n+1$.

Detendremos el proceso cuando todos los bloques de nuestro conjunto hayan sido colocados en las cajas que se hallan en el contador.



Supongamos que tenemos la situación correspondiente al esquema adjunto.

Pongamos sobre la plancha que pivota, y en cada piso, una etiqueta sobre la cual escribiremos el número de cajas que hay en el piso correspondiente.

En este ejemplo obtenemos $\begin{matrix}2\\0\\1\end{matrix}$ y para obtener el número de elementos, siguiendo la escritura convencional, bastará con que hagamos pivotar la tabla *tendremos entonces 201 que es el cardinal del conjunto de bloques que consideramos al principio.*

Podemos también buscar el cardinal del mismo conjunto en otra base, la base tres por ejemplo, es decir que utilizamos los símbolos 0, 1, 2, solamente. A los niños les decimos que cambiamos de país y que vamos al país del tres. Para obtener el cardinal en base tres vamos a utilizar el mismo contador y a proceder del mismo modo : ponemos un bloque en cada caja que colocamos en el piso cero, y seguimos colocando cajas hasta que haya tres cajas en el piso cero. Vertimos entonces el contenido de las tres cajas en una sola que colocaremos en el primer piso. Luego procedemos de la misma manera como procedimos con la base diez, pero, aquí, cuando haya tres cajas con elementos en el piso n, vertimos el contenido de tres cajas en una sola que colocaremos en el piso $n+1$.

Con este sistema la noción de potencia es muy sencilla. ¿Qué tenemos dentro de una caja del piso 2 en el país del diez? Para obtener una caja en el piso uno necesitamos 10 elementos y para obtener una caja en el segundo piso necesitamos diez cajas de diez elementos, o sea que en cada caja del segundo piso tenemos cien elementos. Ya sabemos que cien es 10^2, entonces podemos decir que 10^2 es el número de elementos que se encuentran en una caja del segundo piso en el país del diez.

Qué es 4^3 ? Es lo que hay en una caja del tercer piso en el país del cuatro.

Qué es 10^o ? Estamos en el país del diez. Qué se encuentra en una caja del piso cero ? Según dijimos, en todos los paises procedemos del mismo modo para llenar las cajas del piso cero puesto que siempre ponemos un elemento en cada caja. Entonces $10^o = 1$.

Ahora qué es 4^o ? Es el número de elementos que hay en una caja en el piso cero en el país del cuatro. Es decir que encontramos también uno. $4^o = 1$.

Ahora vamos a un país que llamaremos el país de 'n'. Como vamos a proceder ? Exactamente del mismo modo, colocando un elemento en cada caja del *piso cero. Desde luego* $n^o = 1$ *para cualquier* n *superior a uno.*

Cuando un alumno de primero bachillerato escribe el número 1969 generalmente no se da cuenta de lo que representa este número. Es decir, no sabe que :

$$1969 = 1 \times 10^o + 9 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 9 \times 10^o$$

Pero con este sistema es muy fácil que el alumno llegue a escribir eso. Sabemos que, cuando escribimos 1969 queremos decir que, viviendo en el país del diez, tenemos una caja en el piso tres o sea 1×10^3 *y nueve cajas en el piso dos o sea* 9×10^2 *y seis cajas en el piso uno o sea* 6×10^1 *y nueve cajas en el piso cero o sea* 9×10^o.

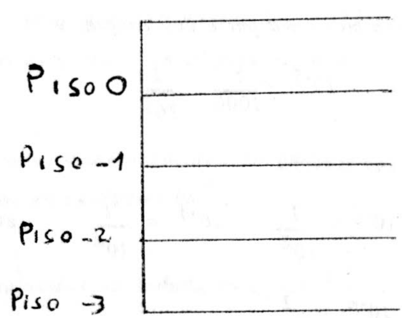
Luego se pueden introducir, en el nivel de primero de bachillerato, los polinomios del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_o$$

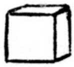
En el caso particular siguiente, x *es elemento de* N *y superior a uno, y los coeficientes* a_i *son todos enteros inferiores a* x.

Basta con que pongamos que estamos en el país de x *para poder interpretar lo que significa este polinomio. Parece que esa puede ser una introducción sencilla a la noción general de polinomio.*

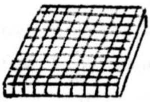
Con este sistema se pueden introducir también las potencias negativas. Cómo vamos a hacer ? Primero introduzcamos la convención siguiente : llamemos piso cero el piso que antes llamamos piso tres. Antes íbamos hacia arriba y contábamos 0, 1, 2, 3, . . . Ahora para decir que vamos hacia el otro lado utilicemos un símbolo especial que puede ser - por ejemplo y entonces encontramos los pisos -1, -2, -3, . . . etc.



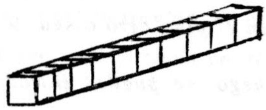
Vamos al país del diez y escojamos el bloque siguiente como representante de la unidad.



Este bloque ha sido obtenido pegando mil cubos chiquitos  Qué hay en una caja inferior al piso cero, es decir en el piso -1 ? Necesitamos diez cajas del piso -1 para obtener una caja del piso cero; si disponemos de



placas obtenidas pegando cien cubos chiquitos, en una caja del piso -1 podemos encontrar una placa de esas. Del mismo modo, ¿Qué hay en una caja del piso -2 ? Podemos encontrar una regla compuesta de diez cubos chiquitos pues diez reglas son equivalentes a una placa. De la misma manera en una caja del piso -3 encontraremos un cubito chiquito ya que diez de esos



cubitos son equivalentes a una regla. Lo que había en una caja del piso tres lo notábamos 10^3 ; del mismo modo notaremos 10^1 lo que hay en una caja del piso -1, 10^{-2} lo que hay en una caja del piso -2, etc. . .

Desde ahora tenemos entonces la definición general de 10^n con $n \subset Z$. Dijimos que en el piso -1 había 10^{-1} elementos, pero, como necesitamos diez cajas para obtener un bloque grande, estamos acostumbrados a decir que una placa es la décima parte del bloque lo que escribimos $\frac{1}{10}$, o sea que $10^{-1} = \frac{1}{10}$

Para obtener un bloque necesitamos mil cubitos, entonces decimos que un cubito es la milésima parte del bloque, y

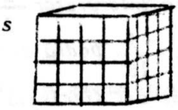
$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

De la misma manera

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} \quad ; \quad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} \quad \text{etc. . .}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

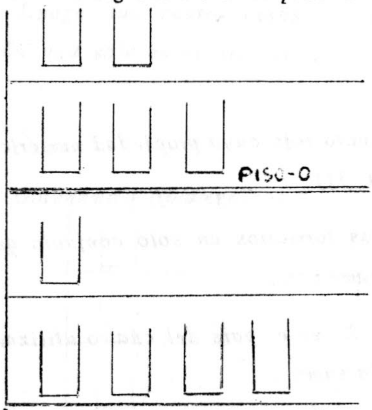
Cómo definir a^n con $n \in Z^-$ y $a \in N$, $a \geq 2$? Basta con ir al país de 'a'
Pongamos por ejemplo 4^{-2}. Vamos al país del cuatro. Nuestro bloque unidad es un bloque obtenido pegando cubitos chiquitos iguales a los utilizados en el país del diez .



En el piso -1 encontramos placas y en el piso -2 encontramos reglas.

Cuántas reglas se necesitan para obtener un bloque en el piso cero ? Vemos que 16 (en base diez) entonces $4^{-2} = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$

Así llegamos a los números decimales; veamos por ejemplo cómo exprimir la situación siguiente : en el piso 1 tenemos 2 cajas



en el piso 0 tenemos 3 cajas

en el piso -1 tenemos 1 caja

en el piso -2 tenemos 4 cajas

Si escribimos 2314 no sabemos a qué número corresponde cada número; entonces convenimos en poner una coma después del número que corresponde al piso cero. Obtenemos así el número decimal 23,14 .

Desde luego el alumno puede saber a qué corresponde 1,712 ; sabrá que tiene que poner una caja en el piso cero, siete en el piso -1, una en el piso -2 y dos en el piso -3 .

Claro está que este método tiene también validez en cualquier país y así seremos capaces de escribir números en cualquier base.

Podemos también hablar de quebrados utilizando este método. Ya encontramos varios quebrados :

$\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$.

Cómo interpretar $\frac{2}{3}$? Es lo que hay en dos cajas del piso -1 en el país del tres. $\frac{1}{16}$ podrá ser considerado como lo que hay en una caja del piso -1 en el país del dieciseis o como lo que hay en una caja en el piso -2 en el país del cuatro o como lo que se encuentra en una caja en el piso -4 en el país del dos.

Sumas en cualquier base .

Supongamos que estamos en el país del cuatro. Cómo vamos a definir la suma de los números

203 y 311 ?

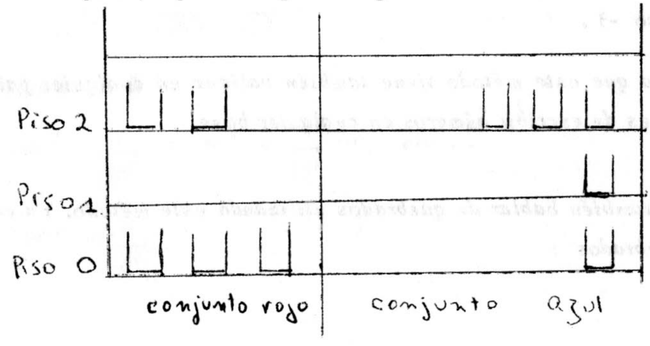
Buscaremos dos conjuntos : un conjunto rojo cuya propiedad numérica sea 203 y un conjunto azul cuyo cardinal sea 311

Cuando tengamos esos dos conjuntos formamos un solo conjunto que sea la reunión de esos dos ; por eso lo llamaremos R.

Busquemos entonces el cardinal de R en el país del cuatro utilizando el contador. Desde luego, por definición de la suma :

203 + 311 = Cardinal de R

Sería más interesante aún proceder del modo siguiente, desde que los alumnos sean capaces : Consideramos la representación de los conjuntos utilizando solamente las cajas y suponiendo que contienen el número correcto de elementos Consideremos por ejemplo el esquema siguiente :

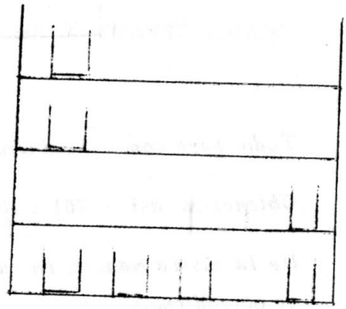


Dada esta situación, qué va a pasar ?

Pongamos entonces a funcionar la máquina que se encuentra en el país del cuatro.

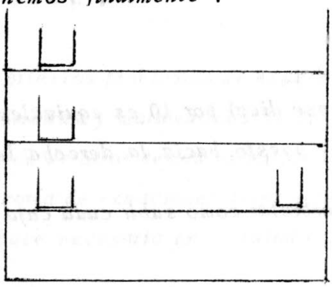
Como hay cinco cajas en el piso dos, la máquina toma cuatro para formar una y ponerla en el piso tres.

Obtenemos entonces el esquema : ⟶



Luego las cuatro cajas del piso cero darán una sola en el piso uno.

Obtenemos finalmente :

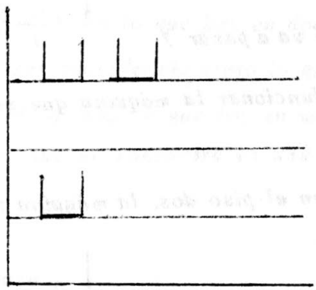


Es decir 1120

Y entonces :

203 + 311 = 1120

m *También hay un modo muy sencillo de introducir la* **multiplicación por la base**. *Supongamos que estamos en el país del tres. Qué significa 201 x 10 ? Eso significa que multiplicamos 201 por la base que es tres, o de otra manera, que se considera la reunión de tres conjuntos cuyo cardinal es 201. Esa situación la representamos utilizando únicamente las cajas y suponiendo que contienen el número correcto de elementos. Podemos considerar que hay tres "contadores" tales que cada uno contenga dos cajas en el piso dos y una en el piso cero. Podemos entonces proceder del modo siguiente : cogemos una caja del piso cero de cada contador. Con esas tres cajas obtenemos una caja en el piso uno. De la misma manera tres cajas del segundo piso darán una del tercer piso. Si seguimos así obtenemos finalmente :*



Todo pasa como si hubiéramos subido de un piso las cajas de un contador.

Obtenemos así : 201 x 10 = 2010

De la misma manera, en cualquier base obtendremos

a b c d x 10 = a b c d 0

Multiplicar un número decimal (en base diez) por 10 es equivalente a subir todo un piso, es decir, trasladar de un puesto hacia la derecha la coma.

Multiplicar por 10^2 *lo podemos interpretar como subir cada caja del contador de dos pisos .*

Liceo Francés Louis Pasteur Bogotá
Recibido. Diciembre de 1969 .