BOLETIN DE MATEMATICAS.
VOLUMEN IV No.
Páginas 27 a 30.

SOBRE UNA PROPIEDAD GEOMETRICA DE LA GRAFICA DE LA FUNCION DE CUARTO GRADO.

francisco lleras

En la curva dada por la ecuación general $y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ tenemos gráficas como las que se muestran en las Figuras 1 a 5.

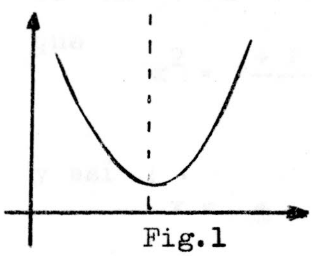
Fig.1

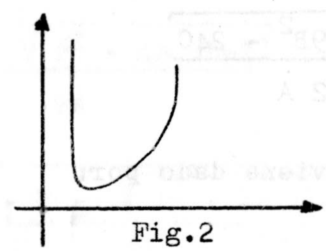
Fig.2

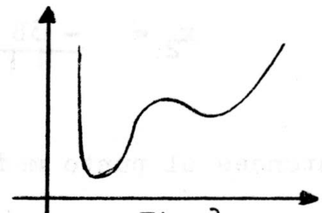
Fig.3

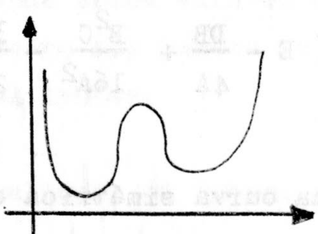
Fig.4

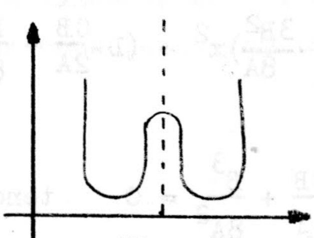
Fig.5

A pesar de que únicamente los tipos 1 y 5 tienen un eje de simetría, vamos a mostrar que en los otros casos existe una cierta «Simetría oblicua», de la cual los casos 1 y 5 no son sino casos particulares.

Es conveniente anotar que la propiedad que vamos a analizar es independiente de la posición de los ejes coordenados, por tanto, la colocación de estos en la figura no tiene ninguna importancia.

Traslademos el eje ^oy al punto medio de los valores de x que anulen la función segunda derivada; es decir, al punto medio de los puntos de inflexión (reales o imaginarios).

La función segunda derivada esta dada por

$$f''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

Los ceros de esta función serán por lo tanto:

$$x_1 = \frac{-3B + \sqrt{9B^2 - 24C}}{12A}$$

$$x_2 = \frac{-3B - \sqrt{9B^2 - 24C}}{12A}$$

y entonces el punto medio viene dado por:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{B}{4A}$$ (inclusive si el radical es imaginario)

La función referida a sus nuevos ejes quedará

$$y = Ax^4 \left(C-\frac{3B^2}{8A}\right)x^2 + \left(D-\frac{CB}{2A} - \frac{B^2}{8A^2}\right)x + \left(E - \frac{DB}{4A} + \frac{B^2C}{16A^2} - \frac{3B^4}{256A^3} \right)$$

Si $D - \frac{CB}{2A} + \frac{B^3}{8A^2} = 0$ tendremos una curva simétrica en la cual si $C - \frac{3B^2}{8} < 0$ tendrá puntos de inflexión reales y será del tipo 5 y si $C - \frac{3B^2}{8A} \geqslant 0$ será del tipo 1.

Si $D - \frac{CB}{2A} + \frac{B^3}{8A^2} \neq 0$ la función será asimétrica, y en este

.-.

caso, si $C - \dfrac{3B^2}{8A} < 0$ se tendrá puntos de inflexión reales, y su gráfico corresponde a uno de los del tipo 3 ó 4; pero, si $C - \dfrac{3B^2}{8A} \geqslant 0$ tendremos un gráfico del tipo 2.

Sin perder generalidad, siempre es posible trasladar el eje ^{o}y de manera que el término en x^3 desaparezca y entonces la función tiene la forma:

$$y = A x^4 + P x^2 + Q X + L$$

Es claro que toda línea recta de pendiente Q que corta la curva, la cortará en puntos tales que los valores de x son opuestos. En efecto:

De $Ax^4 + Px^2 + Qx + L = Q x + k$ se sigue que

$$x^2 = \frac{+ P \pm \sqrt{P^2 - 4A (L-k)}}{2A}$$

y así

$$x = \pm \sqrt{\frac{- P \pm \sqrt{P^2 - 4A (L-k)}}{2A}}$$

Incidentalmente, la pendiente que nos mide la «oblicuidad de la simetría» es la misma que la de la línea que une los puntos de inflexión donde estos existen o la de la tangente en $x = 0$ en los casos donde no hay puntos de inflexión como puede verificarlo facilmente el lector.

Para generalizar, si tenemos:

$$H(x) = F(x) + Ax$$

en donde $F(x)$ es una función par (simétrica con respecto al eje ^{o}y) H tiene una «simetría oblicua» con ángulo de oblicuidad igual a $\theta = \text{Arc.tan } (A)$, vease fig.6

.-.

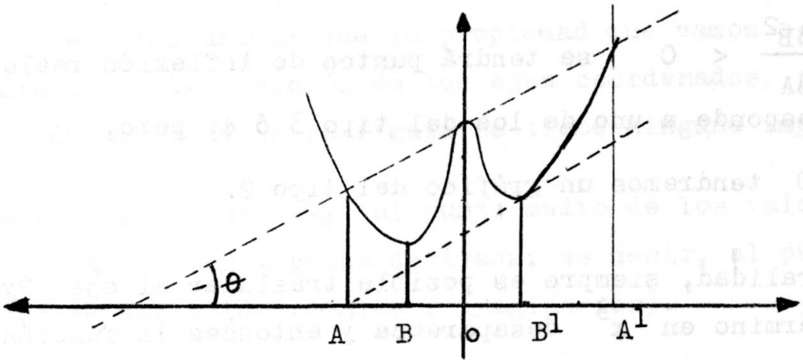

Fig. 6

$$A\,O = O\,A^{1}$$

$$B\,O = O\,B^{1}$$

.-.