Boletín de Matemáticas
Volumen III (1969), págs. 112-114

APUNTE SOBRE LÍMITES DE SUCESIONES

por

Francisco LLERAS

Si tenemos una sucesión $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, definimos las diferencias finitas de distintos órdenes como las sucesiones siguientes:

Diferencia de 1er. orden: $(\Delta_n^1) = (a_2 - a_1,\ a_3 - a_2, \ldots, a_{n+1} - a_n, \ldots)$

Diferencia de 2o. orden: $(\Delta_n^2) = (\Delta_2^1 - \Delta_1^1, \Delta_3^1 - \Delta_2^1, \ldots, \Delta_{n+1}^1 - \Delta_n^1, \ldots)$

....

Diferencia de k-ésimo orden:

$$(\Delta_n^k) = (\Delta_2^{k-1} - \Delta_1^{k-1},\ \Delta_3^{k-1} - \Delta_2^{k-1}, \ldots, \Delta_{n+1}^{k-1} - \Delta_n^{k-1}, \ldots).$$

Se demuestra en álgebra que si

$$(1) \qquad \Delta_1^j = \Delta_2^j = \ldots = \Delta_n^j = \ldots \neq 0,$$

entonces el término general de la sucesión (a_n) puede expresarse como un polinomio en n de grado j, o sea:

$$a_n = f_j(n) = \alpha_j n^j + \alpha_{j-1} n^{j-1} + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos definir un operador Δ que nos permita hallar las diferencias finitas de una función $f(n)$, en la forma siguiente:

$$\Delta a = 0, \quad \text{en donde } a \text{ es una constante cualquiera.}$$

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = F_1(n)$$

$$\Delta F_1(n) = \Delta^2 f(n) = F_1(n+1) - F_1(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$$
$$= F_2(n)$$

$$\Delta F_2(n) = \Delta^3 f(n) = F_2(n+1) - F_2(n) = f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1)$$
$$- f(n) = F_3(n).$$

En general se demuestra por inducción matemática:

$$\Delta^j f(n) = f(n+j) - jf(n+j-1) + \frac{j(j-1)}{2} f(n+j-2) - \ldots \pm f(n), \quad (2)$$

en donde los coeficientes de $f(n+j-i)$ no son otra cosa que los coeficientes del desarrollo binomial de $(a-b)^j$.

Se pueden verificar fácilmente las siguientes propiedades del operador Δ :

$$\Delta^{k+1} f(n) = \Delta\Delta^k f(n) = \Delta^2\Delta^{k-1} f(n) = \dots .$$

$$\Delta^k\left[f(n) \pm g(n)\right] = \Delta^k f(n) \pm \Delta^k g(n) = \Delta^{k-1}\left[\Delta f(n) \pm \Delta g(n)\right] .$$

Demostraremos que si (a_n) es una sucesión cuyo término general puede expresarse como:

$$f_j(n) = \Sigma_{k=1}^{j} \alpha_k n^k ,$$

entonces

$$(3) \qquad \Delta^j f_j(n) = \alpha_j . j!$$

Utilizando inducción, tenemos:

a) para $\Delta f_1(n) =$ constante, $f_1(n)$ sera de primer grado, o sea de la forma $f_1(n) = \alpha_1 n + \alpha_0$. Luego

$$f_1(n) = f_1(n+1) - f_1(n) = \alpha_1 . 1! = \alpha_1 .$$

b) Supongamos que (2) se cumple para un polinomio de grado j. Sea el polinomio

$$f_j(n) = \Sigma_{k=1}^{j} \alpha_k n^k .$$

De acuerdo con el supuesto tendremos:

$$\Delta^j f_j(n) = \alpha_j . j!$$

Tomamos ahora el polinomio

$$f_{j+1}(n) = \alpha_{j+1} n^{j+1} + f_j(n);$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Delta^{j+1} f_{j+1}(n) &= \Delta^{j+1}\left[\alpha_{j+1} n^{j+1} + f_j(n)\right] \\
&= \Delta^{j+1}\alpha_{j+1} n^{j+1} + \Delta^{j+1} f_j(n) \\
&= \Delta^j\Delta\alpha_{j+1} n^{j+1} + \Delta\Delta^j f_j(n) \\
&= \Delta^j\left[\alpha_{j+1}(n+1)^{j+1} - \alpha_{j+1} n^{j+1}\right] + \Delta\alpha_j . j! .
\end{aligned}$$

Pero $\Delta\alpha_j . j! = 0$ puesto que $\Delta a = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta^{j+1} f_{j+1}(n) &= \Delta^j\Big[\alpha_{j+1}\Big(n^{j+1} + (j+1)n^j + \frac{j(j+1)}{2} n^{j-1} + \dots \\
&\qquad + 1 - n^{j+1}\Big)\Big] \\
&= \Delta^j\left[\alpha_{j+1}(j+1)n^j + \varphi_{j-1}(n)\right],
\end{aligned}$$

en donde $\varphi_{j-1}(n)$ es un polinomio en n de grado $j-1$. De acuerdo con el supuesto (2), tendremos

$$\Delta^{j+1} f_{j+1}(n) = \Delta^j \left[\alpha_{j+1}(j+1)n^j + \varphi_{j-1}(n) \right]$$
$$= \alpha_{j+1}(j+1)j! = \alpha_{j+1}(j+1)!\,.$$

Por tanto, del supuesto (3) hemos deducido que éste se cumple para $j+1$, y como hemos mostrado que se cumple para $j = 1$, entonces será válido para todo j.

Dado lo anterior podemos enunciar el siguiente

TEOREMA. Sea (a_n/b_n) una sucesión en donde $a_n = f_j(n)$, polinomio de grado j, $b_n = g_j(n)$, polinomio de grado j. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = \Delta^j f_j(n)/\Delta^j g_j(n).$$

Demostración: En efecto

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha_j n^j + \alpha_{j-1} n^{j-1} + \dots + \alpha_1 n + \alpha_o}{\beta_j n^j + \beta_{j-1} n^{j-1} + \dots + \beta_1 n + \beta_o}$$

implica

$$\lim (a_n/b_n) = \alpha_j/\beta_j \; .$$

Por otro lado:

$$\Delta^j f_j(n)/\Delta^j g_j(n) = \alpha_j \cdot j!/\beta_j \cdot j! = \alpha_j/\beta_j \; ,$$

lo cual demuestre el teorema.

Como consecuencia de lo anterior tenemos que si al tener una sucesión (a_n/b_n) y al tratar de encontrar términos generales para numerador y denominador $f(n) = a_n$ y $g(n) = b_n$, por el sistema de los coeficientes indeterminados, usando el sistema de diferencias finitas indicado en las fórmulas (1) y (2) se encontrase que $\Delta^j f(n)$ y $\Delta^k g(n)$ son cosntantes diferentes de cero, entonces:

Si a) $j < k$ la sucesión tiende a 0; b) $j > k$ la sucesión diverge; c) $j = k$ la sucesión tiende a $\Delta^j f(n)/\Delta^j g(n)$.

La importancia de lo anterior radica en que si el grado j de los polinomios es elevado, para poder hallar los valores de α_j y β_j habría que resolver dos sistemas de $(j+1)$ ecuaciones con otras tantas incógnitas, lo cual es bastante engorroso.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

(recibido en marzo de 1969)