CÁLCULO DE DIFERENCIAS FINITAS: RIQUEZA PARA PROFESORES Y ESTUDIANTES

por Ernesto Ranucci
Profesor de: New York State University at Albany

(Cortesía de *Updating Mathematics*)

A veces se hacen importantes e interesantes descubrimientos en Matemáticas basándose en la observación de cosas simples o sencillas. En efecto, una de las cosas que revela al matemático o << cerebro >> científico es su curiosidad por todas y cada una de las cosas. Hé aquí algunas de las preguntas que se hacen las mentes curiosas.

Cuando se seca el barro y se forman fisuras, ¿hay ahí una forma típica para estas figuras, o son estas redes en forma de telaraña, producto del azar ?

¿Existe alguna manera de hallar la ruta más corta entre las intersecciones de calles en un grupo típico de ellas en una ciudad ?

Si tenemos una caja llena de bolas esféricas de greda, idénticas, y le aplicamos presión a la caja en todas las direcciones, ¿ cuál será el sólido resultante? ¿ A qué se parecerá ?

Estos ejemplos son esencialmente no numéricos en su contenido. Son ejemplos típicos de problemas matemáticos que pueden abordarse por métodos experimentales. Por otro lado, nos encontramos ante evidencias de naturaleza numérica en muchas oportunidades. Podemos utilizar estas evidencias para tratar de generalizar. Veamos algunos ejemplos:

1) Si agrupamos alfileres en la forma que muestra la figura 1, sa-

Figura 1

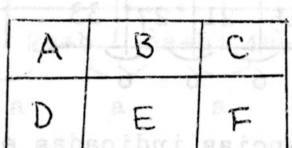

Figura 2

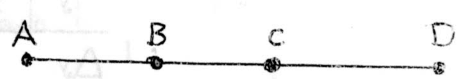

Figura 3

bemos que si hay 40 filas de alfileres así agrupados, en la cuadragésima fila habrá 40 alfileres. Esto es fácil verlo. Pero podremos predecir el número total de alfileres que hay en las 40 filas ?

2) Un diagrama como el de la figura 2 tiene 18 rectángulos dife-

rentes en toda la configuración. Usando una notación informal, vamos a enumerarlos: A, B, C, D, E, F, AB, BC, DE, EF, AD, BE, CF, ABC, DEF, ABDE, BCEEF, ABCDEF. Podemos predecir el número de rectángulos en una figura de 30 celdas por un lado y 20 por el otro ?

3) Dos puntos dividen un segmento rectilíneo en seis segmentos diferentes (figura 3). Son ellos: AB, BC, CD, AC, BD, AD. ¿Podemos predecir el número total de segmentos que se forman al colocar 1.000 puntos diferentes entre los extremos de un segmento rectilíneo ?

En cada uno de estos casos el problema inicial es fácilmente resoluble por conteo directo, con excepción del segundo; pero el sistema de conteo directo no es en la práctica un método satisfactorio.

Ya tenemos planteado el problema. Desarrollemos ahora una técnica especial para resolverlos, la cual resuelve estos problemas y muchos otros. En particular, ampliaremos una técnica tomada del cálculo de diferencias finitas. En muchos casos el uso de esta técnica nos ayuda a encontrar relaciones matemáticas de naturaleza numérica. El álgebra necesaria no es del todo difícil y tenemos la certeza de que pueden asimilarla los estudiantes de secundaria en su primer curso de álgebra. De este tema se pueden sacar muchas ideas y dar a los estudiantes aplicaciones prácticas de los temas que deben estudiar.

LA BASE MATEMÁTICA. Las funciones algebraicas poseen ciertas características familiares fácilmente reconocibles. Por ejemplo, cuando reemplazamos x por 1,2,3,4,5, la función lineal $y = 6x + 3$ nos da la siguiente tabla

x	1	2	3	4	5
y	9	15	21	27	33
Δy		6	6	6	6

Es evidente que las primeras diferencias indicadas en la tabla son constantes. Nótese que usamos el símbolo Δ (delta en griego) en cambio de la frase «difieren en». La función cuadrática $y = x^2 + 6x + 3$ nos da la siguiente tabla

x	1	2	3	4	5
y	10	19	30	43	58
Δy		9	11	13	15
$\Delta(\Delta y)$			2	2	2

Se ve que las primeras diferencias no son constantes; las segundas sí lo son. La función cúbica $y = x^3 + 3x^2 - x + 6$ nos da la siguiente tabla:

x	1	2	3	4	5
y	9	24	57	114	201
Δy	15	33	57	87	
$\Delta(\Delta y)$	18	24	30		
$\Delta(\Delta(\Delta y))$	6	6			

Aquí ni las primeras ni las segundas diferencias son constantes; las terceras sí. Considerando la función de cuarto grado $y = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ obtenemos la siguiente tabla:

x	1	2	3	4	5	6
y	2	19	94	293	706	1447
Δy	17	75	199	413	741	
$\Delta(\Delta y)$	58	124	214	328		
$\Delta(\Delta(\Delta y))$	66	90	114			
$\Delta(\Delta(\Delta(\Delta y)))$	24	24				

Ahora ni las primeras, ni las segundas ni las terceras diferencias son constantes. Pero las cuartas sí lo son.

Examinemos ahora más detalladamente las formas generales de estas funciones.

(I) La función lineal general tiene la forma $y = ax + b$; sustituyendo x por los números 1,2,3, ..., obtenemos

x	1	2	3	4	5	.....
y	a+b	2a+b	3a+b	4a+b	5a+b	
Δy	a	a	a	a		

Observamos que:

<u>La (primera) diferencia cosntante es</u> a.

(II) La función cuadrática general tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$. Sustituyendo x por los números 1,2,3,...., tenemos:

x	1	2	3	4	5	.....
y	$a+b+c$	$4a+2b+c$	$9a+3b+c$	$16a+4b+c$	$25a+5b+c$	
Δy	$3a+b$	$5a+b$	$7a+b$	$9a+b$		
$\Delta(\Delta y)$	$2a$	$2a$	$2a$			

Tenemos que:

<u>La segunda diferencia es constante e igual</u> a $2a$.

(III) La función cúbica general tiene la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sustituyendo x por los valores $1,2,3,4,\ldots$ tenemos la siguiente tabla:

x	1	2	3	4	5
y	$a+b+c+d$	$8a+4b+2c+d$	$27a+9b+3c+d$	$64a+16b+4c+d$	$125a+25b+5c+d$
(Δy)	$7a+3b+c$	$19a+5b+c$	$37a+7b+c$	$61a+9b+c$	
$(\Delta(\Delta y))$	$12a+2b$	$18a+2b$	$24a+2b$		
$(\Delta(\Delta(\Delta y)))$	$6a$	$6a$			

Dedudimos que:

<u>La tercera diferencia es constante e igual a</u> $6a$.

(IV) De igual manera la fórmula para la función de cuarto grado es:

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

y se puede mostrar que su cuarta diferencia es constante e igual a $24a$. Así mismo puede verse que una función de grado n tiene la enésima diferencia constante e igual a $(n!)a$.

<u>APLICACIÓN DE LA IDEA BÁSICA</u>. Ahora podemos utilizar con certeza estas funciones para resolver problemas. Examinemos primero dos problemas típicos relacionados con progresiones aritméticas.

1) Hallar el quincuagésimo término de la progresión aritmética: $1,3,5,7,9,\ldots$. Si "x" representa el número del término é "y" representa su valor, tabulando estos valores tenemos:

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9
Δy	2	2	2	2	

Notamos que la primera diferencia es constante, luego la fórmula será la de una ecuación de la froma $y = ax + b$. Podemos utilizar ahora la información que tenemos sobre este tipo de funciones estudiadas en (I):

$$\Delta y: \; a = 2 \;; \quad a+b = 1 \Rightarrow 2+b = 1 \Rightarrow b = -1.$$

La ecuación será $y = 2x - 1$, y el quincuagésimo término es (haciendo $x = 50$) igual a 99. Este resultado puede comprobarse con la fórmula usual para el n-simo término de una progresión aritmética, o más sencillamente contando hasta el quincuagésimo número impar.

2) Hallar la suma de los 50 primeros términos de la serie anterior: 1,3,5,.... . Nuevamente hagamos «x» igual al número del término pero haciendo esta vez que «y» sea la suma de todos los términos hasta ese punto. Nuestra sucesión de sumas será:

$$1;\; 1+3 = 4;\quad 1+3+5 = 9;\quad 1+3+5+7 = 16;\quad \text{etc..}$$

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25
Δy	3	5	7	9	
$\Delta(\Delta y)$	2	2	2		

La segunda diferencia es constante, luego la función es cuadrática. Observando (II) tenemos que:

$$\Delta(\Delta y): \; 2a = 2 \Rightarrow a = 1;$$

$$\Delta y: \; 3a+b = 3 \Rightarrow 3+b = 3 \Rightarrow b = 0;$$

$$y: \; a+b+c = 1 \Rightarrow 1+0+c = 1 \Rightarrow c = 0.$$

Luego la función es $y = x^2$ y la suma de los primeros 50 términos de la serie ($x = 50$) es 2,500 . Este resultado puede confirmarse con el uso de la fórmula conocida para la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética: $n/2(a+1)$, ó simplemente observando que cada valor de y en la tabla se puede obtener elevando al cuadrado el valor de la x correspondiente.

3) Si hay 500 puntos en un plano de entre los cuales no podemos formar ninguna tripla de puntos colineales, ¿cuántos segmentos se pueden trazar ?

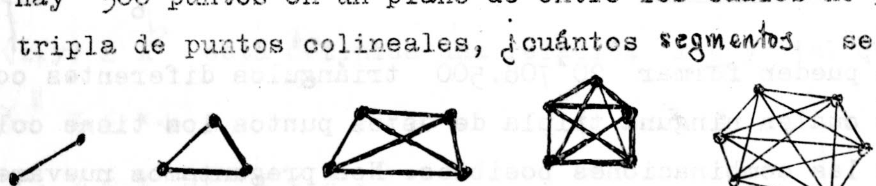

Figura 4.

La experiencia de la figura 4 nos da la siguiente tabla:

Puntos	x	2	3	4	5	6
Segmentos	y	1	3	6	10	15

$$
\begin{array}{lcccc}
\Delta y & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\Delta(\Delta y) & & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Dado que la segunda diferencia es constante la función es cuadrática. Usando la información en(II), tenemos

$$\Delta(\Delta y): \quad 2a = 1 \;\Rightarrow\; a = 1/2$$

$$\Delta y: \quad 5a+b = 2 \;\Rightarrow\; 5/2 + b = 2 \;\Rightarrow\; b = -1/2;$$

$$y: \quad 4a+2b+c = 1 \;\Rightarrow\; 2 - 1 + c = 1 \;\Rightarrow\; c = 0.$$

Luego $y = x(x-1)/2$. Ó sea que resultan 124.750 segmentos diferentes formados por 500 puntos tomados por pares. Un aspecto interesante de este problema es el siguiente: ¿qué cambios resultan al considerar los 500 puntos en un espacio de tres dimensiones ? Respuesta: Ninguno. Dos puntos siempre determinan un segmento.

4) ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar con las condiciones del problema 3), agregando que solamente los puntos dados originalmente pueden considerarse como posibles vértices de estos triángulos ? La experiencia directa sobre la figura 4, nos da la siguiente tabla:

Puntos	x	2	3	4	5	6	7
Triángulos	y	0	1	4	10	20	35

$$
\begin{array}{lccccc}
\Delta y & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\
\Delta(\Delta y) & & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\Delta(\Delta(\Delta y)) & & & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Dado que la tercera diferencia es constante, la función será cúbica. Usando los resultados en (III), tenemos

$$y = x^3/6 - x^2/2 + x/3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

Luego se pueden formar 20'708.500 triángulos diferentes con 500 puntos, para los cuales ninguna tripla de estos puntos los tiene colineales, tomados en todas las combinaciones posibles. Nos preguntamos nuevamente qué sucede si los 500 puntos no son colpnares. La respuesta es la misma: Nada. ¿Por qué?

¿QUÉ HEMOS ESTABLECIDO ? Hemos desarrollado una poderosa herramienta matemática para dar detreza a los estudiantes de álgebra. La enseñanza de este procedimiento brinda una excelente oportunidad para el estudio y solución de ecuaciones, experimentación y manipulación de expresiones algebraicas y de cálculo. Ejercicios éstos muy necesarios para los estudiantes. El estudiante despierto hará acopio de esta técnica para utilizarla en las muchas otras oportunidades que tendrá.

Una última advertencia: Cuidado con creer que este método es utilizable en todos los casos. Se puede desarrollar más cuando los estudiantes estén en condiciones de entender. Una manera de mostrar una falla en el método es tomar una sucesión parecida a la siguiente (el número de movimientos y necesarios para completar el juego <<Torres de Hanoi>> utilizando x anillos):

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	7	15	31	63

$$
\begin{array}{lccccc}
\Delta y & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\
\Delta(\Delta y) & 2 & 4 & 8 & 16 & \\
(\Delta(\Delta y)) & 2 & 4 & 8 & &
\end{array}
$$

Es claro que estas diferencias continuarán repitiéndose siempre; la fórmula no tiene forma polinómica: $y = 2^x - 1$.

<<<<<< o >>>>>>