Boletín de Matemáticas
Volumen III (1969), págs. 77-80

ANALISIS DE FUNCIONES DESARROLLABLES EN SERIE DE TAYLOR

por

Francisco LLERAS

Es frecuente en el estudio de los puntos críticos de una función, dar como único criterio, en el caso que se tengan k derivadas nulas consecutivas, el de investigar el signo de la primera derivada antes y después del punto en cuestión para saber si es un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. Este criterio es útil y sencillo en el caso de funciones simples; pero, en general, puede llevar a cálculos demorados y difíciles.

Vamos a establecer un criterio que nos permite salvar esta dificultad en el caso de funciones desarrollables en serie de Taylor en una vecindad del punto considerado. Haremos la demostración completa del criterio en los puntos críticos; al finalizar indicaremos sencillamente el procedimiento que se sigue para llegar al criterio en los puntos donde la función es creciente o decreciente, resumiendo finalmente en un cuadro sinóptico, la totalidad de los casos.

TEOREMA 1. Sean F una función, a una raíz múltiple de F, de multiplicidad k; es decir, $F(x) = (x-a)^k f(x)$, donde $f(a) \neq 0$. Si f admite un desarrollo de Taylor en un intervalo de la forma $(a-h, a+h)$, con $h > 0$, entonces $F(a) = F'(a) = \dots = F^{(k-1)}(a) = 0$.

Demostración: Utilizando la fórmula de Leibnitz obtenemos:

$$D^j F(x) = k(k-1)\dots(k-j+1)(x-a)^{k-j} f(x) + \Sigma_{i=1}^{j} \binom{j}{i} D^j f(x) D^{j-i}(x-a)^k. \quad \dots\dots (*)$$

Como f admite un desarrollo de Taylor alrededor del punto a, todas sus derivadas son finitas, y por tanto, de $(*)$ se deduce que $D^j F(a) = 0$ si $0 \leq j \leq k-1$ y $D^k F(a) = k!\, f(a) \neq 0$.

Nota: Si $F(a) \neq 0$, pero $F(x) = F(a) + (x-a)^k f(x)$, donde f es desarrollable en serie de Taylor alrededor de a y $f(a) \neq 0$, entonces:

$$F'(a) = \dots = F^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad F^{(k)}(a) = k!\, f(a).$$

TEOREMA 2. Si F es desarrollable en serie de Taylor alrededor de a y $F'(a) = \dots = F^{(k-1)}(a) = 0$, entonces $F(x) = f(x)(x-a)^k + F(a)$, donde f admite un desarrollo de Taylor alrededor de a. Si además $F^{(k)}(a) \neq 0$, entonces $f(a) = 0$.

Demostración: Como

$$F(x) = \Sigma_{j=o}^{\infty} \frac{F^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$$

y $F'(a) = \ldots = F^{(k+1)}(a) = 0$, entonces

$$F(x) = F(a) + \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{F^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \ldots$$

resulta entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + (x-a)^k \left[\frac{F^{(k)}(a)}{k!} + \frac{F^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a) + \ldots \right] \\ &= F(a) + (x-a)^k f(x), \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \Sigma_{j=k}^{\infty} \frac{F^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^{j-k} .$$

Evidentemente, $f(x)$ admite un desarrollo de Taylor alrededor de a, y $f(a) \neq 0$ si $F^{(k)}(a) \neq 0$.

DEFINICION. Un punto de inflexión a de F se llamará punto de inflexión tipo (1) (resp. tipo (2)), si existe $h > 0$ tal que para $a-h < x < a$ se tiene $f(x) < f(a)$ (resp., $f(a) < f(x)$) y para cada $a < x < a+h$ se tiene $f(a) < f(x)$ (resp., $f(x) < f(a)$).

TEOREMA 3. Si F es desarrollable en serie de Taylor alrdedor de a, y $F'(a) = \ldots = F^{(k-1)}(a) = 0$, $F^{(k)}(a) \neq 0$, $k > 1$, entonces a es:

a) Un máximo si k es par y $F^{(k)}(a) < 0$.

b) Un mínimo si k es par y $F^{(k)}(a) > 0$.

c) Un punto de inflexión tipo (1) si k es impar y $F^{(k)}(a) > 0$.

d) Un punto de inflexión tipo (2) si k es impar y $F^{(k)}(a) < 0$.

Demostración: De acuerdo con los teoremas anteriores, debemos tener

$$F(x) = (x-a)^k f(x) + F(a), \quad \text{con} \quad f(a) \neq 0 \ , \quad y$$
$$F^{(k)}(a) = k! \ f(a).$$

Como la primera derivada de F es nula, entonces a es un punto crítico. Si se trata de un máximo y de un mínimo, entonces $F(a+h)-F(a)$ y $F(a-h)-F(a)$ deben tener el mismo signo: positivo si es mínimo y negativo si es máximo. De acuerdo con la forma de la función, tenemos que

$$F(a+h) - F(a) = h^k f(a+h) \ ; \quad F(a-h) - F(a) = (-h)^k f(a-h).$$

Como f es una función continua, es posible elegir h de tal manera que $f(a+h)$ y $f(a-h)$ tengan el mismo signo de $f(a)$; luego $F(a+h)-F(a)$ y $F(a-h)-F(a)$ tienen el mismo signo si y sólo si h^k y $(-h)^k$ tienen el mismo signo, y este es el caso únicamente si k es par. Si k es par, entonces $F(a+h)-F(a)$ y $F(a-h)-F(a)$ tendrán el mismo signo de $f(a)=F^{(k)}(a)/k!$ y esto nos indica que tendremos máximo si $F^{(k)}(a)<0$ y mínimo si $F^{(k)}(a)>0$.

En el caso de un punto de inflexión, los signos de estas diferencias deberán ser distintos, positivo el primero y negativo el segundo para el tipo (1), y al contrario para el tipo (2), lo cual, en virtud de las mismas consideraciones anteriores, sólo es posible si k es impar, debiendo ser $F^{(k)}(a)$ positivo para el tipo (1) y negativo para el tipo (2).

Ejemplo: $F(x)=(x-\pi)^8\cos^7 x.\ e^x + C$. Por simple inspección, sabemos que para $x=\pi$, tenemos el caso de $k-1$ derivadas sucesivas nulas, y como k es par ($k=8$) y $\cos^7\pi.\ e^\pi$ es negativo, se trata entonces de un máximo.

A continuación presentamos un cuadro sinóptico con la totalidad de los criterios:

ANALISIS DE CONCAVIDADES, MAXIMOS, MINIMOS Y PUNTOS DE INFLEXION EN $(a,F(a))$, $y=F(x)$.

(derivadas de orden superior)

a=0

$F'(a)=0$
- Si la primera derivada no nula es de orden par
  - $F^{(2n)}(a)>0$  $y=x^4$
  - $F^{(2n)}(a)<0$  $y=-x^4$
- Si la primera derivada no nula es orden impar
  - $F^{(2n+1)}(a)>0$  $y=x^5$
  - $F^{(2n+1)}(a)<0$  $y=-x^5$

$F'(a)>0$ creciente
- Si la primera derivada no nula es de orden par
  - $F^{(2n)}(a)>0$  $y=x^4+x$
  - $F^{(2n)}(a)<0$  $y=-x^4+x$
- Si la primera derivada no nula es de orden impar
  - $F^{(2n+1)}(a)>0$  $y=x^5+x$
  - $F^{(2n+1)}(a)<0$  $y=-x^5+x$

$F'(a)<0$ decreciente
- Si la primera derivada no nula es de orden par
  - $F^{(2n)}(a)>0$ $y=x^4-x$
  - $F^{(2n)}(a)<0$  $y=-x^4-x$

Si la primera derivada no nula es orden impar	$F^{(2n+1)}(a)>0$	$y=x^5-x$
	$F^{(2n+1)}(a)<0$	$y=-x^5-x$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, S.A.

(Recibido en noviembre de 1968)