CONSTRUCCIÓN AXIOMÁTICA DE LOS NÚMEROS REALES

por

Hernando PÉREZ

I. DEFINICIÓN. Llamaremos conjunto de los números reales a un conjunto (que denotaremos por $\mathbb{R}$) provisto de dos operaciones $(+,\cdot)$ y una relación binaria $(<)$ tales que:

Axiomas algebraicos:

(A1) Dados a, b elementos de $\mathbb{R}$, se tiene que $a + b = b + a$ y $a\cdot b = b\cdot a$.

(A2) Si a, b, c son elementos de $\mathbb{R}$, entonces

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c .$$

(A3) Existen en $\mathbb{R}$ elementos que denotaremos por 0 y 1 $(0 \neq 1)$ tales que si a es un número real cualquiera, entonces

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad a\cdot 1 = a.$$

(A4) Si a y b son números reales y $b \neq 0$, entonces existen $\bar{a}$ y b^{-1}

$$a + \bar{a} = 0 \quad \text{y} \quad b\cdot b^{-1} = 1.$$

(A5) Si a, b, c, son elementos de $\mathbb{R}$, entonces

$$a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

Axiomas de orden:

(O1) Para a, b elementos de $\mathbb{R}$, se verifica una sola de las siguientes afirmaciones:

$$a = b, \quad a < b, \quad b < a .$$

(O2) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < a\cdot b$.

(O3) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$, cualesquiera que sea c.

(O4) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Axioma topológico:

(T) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, admite un extremo superior.

II. CONSECUENCIAS IMPORTANTES

NOTA 1. Si $0'$ es un elemento de $\mathbb{R}$ tal que $a + 0' = a$ cualquiera que sea a en $\mathbb{R}$, entonces $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$. De manera que, 0 es el único elemento que satisface esta propiedad. Podemos hacer la misma anotación sobre 1.

NOTA 2. Si a es un número real dado y a' es un número real tal que $a + a' = 0$, entonces $a' = a' + 0 = a' + (a + a) = (a' + a) + a = (a + a') + a = 0 + a = a$. Demanera que, cada número real a tiene un único opuesto aditivo $\bar{a}$. De la misma manera, podemos anotar que todo número real diferente de 0 tiene un único opuesto multiplicativo.

NOTA 3. De los axiomas (A1) y (A5) podemos concluir lo siguiente:

$$a\cdot(b + c) = (b + c)\cdot a$$

$$a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c = b\cdot a + ca,$$

de manera que

$$(b + c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a\ .$$

Demostraremos ahora algunas propiedades importantes.

PROPOSICIÓN 1. $a\cdot 0 = 0$.

TEOREMA 1. Dados a, b elementos de $\mathbb{R}$, existe un único x en $\mathbb{R}$ tal que $a + x = b$.

Demostración: a) Existencia. El número real $\bar{a} + b$ es tal que

$$a + (\bar{a} + b) = b\ .$$

b) Unicidad. Si x_1 y x_2 son tales que $a + x_1 = b$ y $a + x_2 = b$, entonces $a + x_1 = a + x_2$, de manera que $\bar{a} + (a + x_1) = \bar{a} + (a + x_2)$, y entonces $x_1 = x_2$.

COROLARIO 1. Para a, b elementos de $\mathbb{R}$ se cumple que $\bar{a}\cdot b = \overline{a\cdot b}$.

Demostración: En efecto, según (A4), $a\cdot b + \overline{a\cdot b} = 0$, de manera que $\overline{a\cdot b}$ es el único x tal que $a\cdot b + x = 0$; pero $a\cdot b + \bar{a}\cdot b = (a + \bar{a})b = 0\cdot b = 0$; es decir, $a\cdot b + \bar{a}\cdot b = 0$, por lo tanto, $\bar{a}\cdot b = \overline{a\cdot b}$.

COROLARIO 2. Para a, b elementos de R se cumple que $\bar{a}\cdot\bar{b} = ab$.

Demostración: Según el corolario 1, tenemos $\bar{a}\cdot b + a\cdot b = 0$; pero $\bar{a}\cdot b + \bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot(b + \bar{b}) = \bar{a}\cdot 0 = 0$, luego $\bar{a}\cdot b + \bar{a}\cdot\bar{b} = 0$ y utilizando el teorema 1, concluimos $a\cdot b = \bar{a}\cdot\bar{b}.= 0$

COROLARIO 3. $\overline{(a + b)} = \bar{a} + \bar{b}$.

Demostración: Tenemos

$$
\begin{aligned}
(a + b) + (\bar{a} + \bar{b}) &= \left[(a + b) + \bar{a}\right] + \bar{b} = \left[a + (b + \bar{a})\right] + \bar{b} \\
&= \left[a + (\bar{a} + b)\right] + \bar{b} = \left[a + (\bar{a} + b)\right] + \bar{b} \\
&= \left[(\bar{a} + a) + b\right] + \bar{b} = (0 + b) + \bar{b} = b + \bar{b} = 0,
\end{aligned}
$$

y como $\overline{(a + b)}$ es único, resulta $\overline{(a + b)} = \bar{a} + \bar{b}$.

PROPOSICIÓN 2. Si a es un número real diferente de cero, entonces $0 < a\cdot a$.

Demostración: Si $a \neq 0$ entonces $a < 0$ ó $0 < a$ ((01)). Supongamos que $0 < a$, entonces $0 < a\cdot a$, según (02). Si $a < 0$, entonces $a + \bar{a} < 0 + \bar{a}$, según (03), y entonces $0 < \bar{a}$ y, por lo tanto, $0 < \bar{a}\cdot\bar{a} = a\, a$.

COROLARIO 1. $0 < 1$.

Demostración: $0 < 1\cdot 1 = 1$.

COROLARIO 2. El elemento $1 + 1 = 2$ es tal que $0 < 2$.

Demostración: $0 < 1 \Rightarrow 0 + 1 < 1 + 1$, es decir, $1 < 2$, y, por lo tanto, $0 < 2$, según (04).

PROPOSICIÓN 3. Si $a < b$ y $0 < c$ entonces $a\cdot c < b\cdot c$.

Demostración: Si $a < b$ entonces $a + \bar{a} < b + \bar{a}$, por (03), o sea $0 < b + \bar{a}$, y, por lo tanto, $0 < (b + \bar{a})\cdot c$, es decir, $0 < b\cdot c + \bar{a}\cdot c = b\cdot c + \overline{a\cdot c}$, y entonces $a\cdot c < (b\cdot c + \overline{a\cdot c}) + a\cdot c$, es decir, $a\cdot c < b\cdot c$.

PROPOSICIÓN 4. Si $0 < a$ entonces $0 < a^{-1}$.

Demostración: Si $a^{-1} < 0$ entonces $a^{-1}\cdot a < 0\, a$, es decir, $1 < 0$, contrario al corolario 1 de la proposición 2. Si $a^{-1} = 0$, entonces $a^{-1}\cdot a = 0\cdot a$, o sea $1 = 0$, lo cual es también contradictorio. De manera que, según el axioma (01), debemos tener $0 < a^{-1}$.

En particular, $0 < 2^{-1}$.

PROPOSICIÓN 5. Si a, b son números reales tales que $a < b$, existe un x en $\mathbb{R}$ tal que $a < x$ y $x < b$ $(a < x < b)$.

Demostración: Si $a < b$, entonces

$$\left.\begin{matrix} a + a < a + b \\ a + b < b + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} (1 + 1)\cdot a < a + b \\ a + b < (1 + 1)\cdot b \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 2\cdot a < a + b \\ a + b < 2\cdot b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 2^{-1}\cdot(2\cdot a) < 2^{-1}\cdot(a + b) \\ 2^{-1}\cdot(a+ b) < 2^{-1}\cdot(2\cdot b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a < 2^{-1}\cdot(a + b) \\ 2^{-1}\cdot(a + b) < b \end{matrix}\right\}$$

Tomando $x = 2^{-1}\cdot(a + b)$ la proposición queda demostrada.

Obsérvese que, como $a < x$ y $x < b$ podemos encontrar y, z en $\mathbb{R}$ tales que $a < y < x$ y $x < z < b$. Aplicando este razonamiento repetidas veces, observamos que $\mathbb{R}$ es un conjunto bastante «grande».

III. DEFINICIÓN 1. Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ se llama inductivo si satisface la propiedad siguiente:

(J) Si x es un elemento de I entonces $x + 1$ es un elemento de I.

Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{R}$ es obviamente un conjunto inductivo; el conjunto $I = \{0,1\}$ no es inductivo pues 1 es un elemento de I, pero $1 + 1 = 2$ no es elemento de I.

Si a es un número real dado, llamaremos $\mathcal{F}_a$ la colección de todos los subconjuntos indcutivos de $\mathbb{R}$ que contienen a a; observemos que $\mathbb{R}$ es un elemento de esta colección.

El conjunto $I_a = \bigcap_{a\in \mathcal{F}_a} F$ es un conjunto inductivo, pues si x es un elemento de I_a entonces x es un elemento de cualquier F de la colección $\mathcal{F}_a$ y por tanto, $x + 1$ también es un elemento de cualquiera de estos F, pues ellos son inductivos, y esto significa que $x + 1$ es un elemento de I_a. Es claro también que a es un elemento de I_a. Así pues, I_a es el menor conjunto inductivo de números reales que contiene a a.

DEFINICIÓN 2. Al conjunto $\mathbb{N} = I_0$ lo llamamos el conjunto de los números naturales de $\mathbb{R}$.

Según la definición, $\mathbb{N}$ es el menor subconjunto inductivo que contiene a 0. Es fácil ver que $I_a = a + \mathbb{N} = \{a + n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$.

PROPOSICIÓN 6. Si m, n son elementos de $\mathbb{N}$, entonces $m + n$ es elemento de $\mathbb{N}$.

Demostración: Tomemos m un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$. Definimos

$$X_m = \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ m + n \in \mathbb{N} \}$$

(X_m es el conjunto de todos los elementos n de $\mathbb{N}$ tales que $m + n$ es un elemento de $\mathbb{N}$). $0 \in X_m$ pues $m + 0 = m \in \mathbb{N}$. Si $n \in X_m$, entonces $m + n \in \mathbb{N}$, y como $\mathbb{N}$ es inductivo, entonces $(m + n) + 1 \in \mathbb{N}$, lo cual significa que $n + 1 \in X_m$. Tenemos, pues, que X_m contiene a 0, es inductivo y es un subconjunto de $\mathbb{N}$, por lo tanto, $X_m = \mathbb{N}$, según la definición de $\mathbb{N}$. Esto demuestra la proposición.

PROPOSICIÓN 7. Si m,n son números naturales entonces $m \cdot n$ también es un número natural.

PROPOSICION 8. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n = 0$ ó $0 < n$ (es decir, $0 \leq n$).

Demostración: Sea $X = \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ 0 \leq n \}$; tenemos $0 \in X$ ya que $0 \leq 0$. Si $n \in X$, entonces $0 \leq n$ y, por lo tanto, $0 + 1 \leq n + 1$, y entonces $0 < 1 \leq n + 1$, de donde deducimos $n + 1 \in X$. Concluímos que $X = \mathbb{N}$.

PROPOSICION 9. $I_1 = \{ m \in \mathbb{N} \ ; \ m \neq 0 \}$

Demostración: Sea $X = \{ m \in \mathbb{N} \ ; \ m \neq 0 \}$. a) Sabemos que $I_1 = \mathbb{N} + 1 = \{ n+1 \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$, por lo tanto, $I_1 \subset \mathbb{N}$. Además, según la proposición anterior, $0 \leq n + 1$; pero $n + 1 = 0$, implica $n = \bar{1}$, lo cual es imposible, pues $n \in N$ y entonces $0 \leq n$ ($0 < 1$ implica $\bar{1} < 0$); de manera que, $0 < n+1$ y esto nos permite concluir que $I_1 \subset X$.

b) De otra parte, X es un conjunto inductivo que contiene a 1, lo cual nos permite afirmar que $X \subset I_1$.

COROLARIO. Todo elemento m de $\mathbb{N}$ diferente de 0 puede escribirse como $m = n+1$, donde n pertenece a $\mathbb{N}$.

PROPOSICION 10. Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $n < m$, entonces $m + \bar{n} \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $X = \{n \in \mathbb{N};$ cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ se tiene $m + \bar{n} \in \mathbb{N}\}$. $0 \in X$, pues $0 = \bar{0}$ y $m + 0 = m$. Además, X es inductivo: en efecto, supongamos que $n \in X$ y escojamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $n+1 < m$; entonces $n < m$ y, por lo tanto, $m + \bar{n} \in \mathbb{N}$, pero $m + \bar{n} \neq 0$, pues de lo contrario $m = n$; de manera que, $m + \bar{n} = k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$; de lo cual podemos concluir que $(m + \bar{n}) + \bar{1} = k$. O sea que $m + \overline{(n + 1)}$ pertenece a $\mathbb{N}$, lo cual significa que $n+1 \in X$. Se concluye entonces que $X = \mathbb{N}$.

PROPOSICION 11. Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $0 < x < 1$, entonces $x \notin \mathbb{N}$.

Demostración: Supongamos que existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x < 1$. Como $x \neq 0$, $x = k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$; entonces $k + 1 < 1$ y concluímos que $k < 0$, y esto contradice la proposición 8.

COROLARIO. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ son tales que $n < x < n+1$, entonces $x \notin \mathbb{N}$.

Demostración: Suponiendo que existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$, entonces $0 < x + n < 1$, y como $n < x$, $x + n \in \mathbb{N}$, por la proposición 10, contradiciendo la proposición anterior.

TEOREMA 2. Si T es un subconjunto de $\mathbb{N}$ entonces existe un elemento $k_o \in T$ tal que si $k \in T$ entonces $k_o \leq k$.

Demostración: Si $0 \in T$, entonces tomando $k_o = 0$ el teorema queda demostrado según la proposición 8. Si $0 \notin T$, formemos el conjunto

$$H = \{ n \in \mathbb{N} ;\ (\forall m)(m \in \mathbb{N} \text{ y } m \leq n \text{ entonces } m \notin T)\}$$

0 es un elemento de H y si H fuese inductivo, entonces $H = \mathbb{N}$ de manera que $T = \emptyset$. De manera que existe $k_1 \in H$ tal que $k_1 + 1 \notin H$. Tomando $k_o = k_1+1$, tendremos que $k_o \in T$, pues de lo contrario, $k_o = k_1 + 1 \in H$. Además, si $k \in T$ entonces $k_o \leq k$, ya que $k < k_o$ implica

$k \leq k_1$ $(k_1 < k < k_1+1 = k_o$, no es posible) y entonces $k \notin T$.

IV. APLICACIONES IMPORTANTES DEL AXIOMA TOPOLÓGICO.

Explicación: Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, un elemento $b \in \mathbb{R}$ se dice una cota supeior de A si $(\forall a \in A)(a \leq b)$. Una cota superior b de A se dice un extremo superior de A si para toda otra cota superior c de A se tiene $b \leq c$.

El axioma (T) afirma que todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}$ tiene un extremo superior.

NOTA 3. Si b es una cota supeior de A, todo número real mayor que b es también una cota superior de A. El extremo superior de A es único ya que él es la cota superior mínima.

PROPOSICION 12. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no está acotado superiormente.

Demostración: Si N está acotado superiormente, podemos afirmar que existe el extremo superior b de N. Como $b + \bar{1} < b$, entonces $b + \bar{1}$ no puede ser una cota superior de $\mathbb{N}$, lo cual nos permite afirmar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b + \bar{1} < n$, y entonces $b < n + 1$, lo cual es imposible, pues $n+1 \in \mathbb{N}$ y b es una cota superior de $\mathbb{N}$.

PROPOSICION 13 (Propiedad arquimediana). Si x, y son números reales con $0 < x$, existe $n \in I_1$ tal que $y < nx$.

Demostración: Si $y \leq 0$ podemos tomar $n = 1$. Supongamos, pues, que $0 < y$ y que para todo $n \in I_1$ se tiene $nx \leq y$. El conjunto $A = \{nx \ ; \ n \in I_1\}$ es entonces acotado, y, por lo tanto, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que M es el extremo superior de A. Por otra parte, $A = \{(n+\bar{1})x \ ; \ n \in I_2\}$; luego, si $n \in I_2$, $n \in I_1$ y, por lo tanto, $nx \leq M$; entonces $(n+\bar{1})x \leq M + \bar{x}$, de lo cual concluimos que $M + \bar{x}$ es una cota superior de A. Pero esto es imposible, pues $M + \bar{x} < M$, y M es la menor cota superior de A.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

(Recibido en octubre de 1968)