

REPRESENTACIONES MATRICIALES DE LA
TRANSFORMACION DE FOURIER⁽¹⁾

por

Darío SANCHEZ

§1 UNA MATRIZ DIAGONAL PARA LA TRANSFORMACION DE
FOURIER

La transformación de Fourier es un operador unitario en el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$, es decir, un operador que relaciona dos bases del espacio. Puesto que un operador unitario es acotado (su inverso también es acotado) la transformación de Fourier permite una representación matricial utilizando una cierta base del espacio $L_2(-\infty, +\infty)$. La anterior afirmación se puede comprobar recordando el teorema de Fourier-Plancherel, el cual enunciaremos a continuación:

La función

$$g(x; m) = \int_{-m}^{+m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{ixy} f(y) dy,$$

$f(y) \in L_2(-\infty, +\infty)$, converge a una función $g(x)$ de L_2 cuando $m \rightarrow +\infty$.

El operador

$$\mathcal{F}f(x) = g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{ixy} f(y) dy$$

es un operador unitario de L_2 sobre L_2 .

(1) Resultados de la tesis presentada para obtener el título de Matemático en la U.Nacional de Colombia, 1966.

De la misma manera, el núcleo e^{-ixy} determina un operador que es unitario y tal que

$$\mathcal{F}^{-1} f = \overline{\mathcal{F}} f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{e}^{-ixy} f(y) dy.$$

Por consiguiente se tiene la siguiente relación de inversión:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y) dy \iff f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} g(y) dy,$$

donde las integrales impropias convergen en el espacio $L_2(-\infty, +\infty)$.

Observando que \mathcal{F} es un operador unitario, luego acotado, y que \mathcal{F}^{-1} es también acotado, \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} admiten representaciones matriciales, con matrices acotadas. Para obtener tales representaciones matriciales es necesario utilizar una base ortonormal de $L_2(-\infty, +\infty)$.

Es bien conocido que los polinomios de Hermite con factor $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ determinan un sistema ortonormal completo de $L_2(-\infty, +\infty)$. Recordémos que los polinomios de Hermite $H_n(x)$ están definidos por

$$f(t) = e^{-t^2 + 2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

ó,

$$H_n(x) = 2^n \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \frac{n!}{p!(n-2p)! 2^{2p}} x^{n-2p}$$

Las funciones

$$(I) \quad \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (n=0, 1, \dots)$$

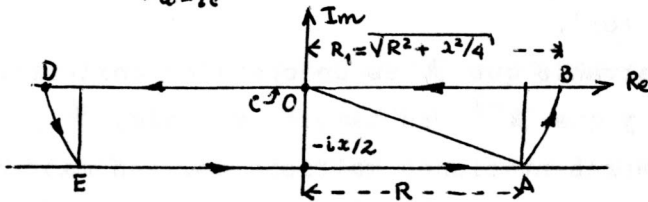
forman un sistema ortonormal completo de $L_2(-\infty, +\infty)$.

Se obtiene la matriz asociada a la transformación de Fourier en la base anterior en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & i^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} = T$$

para lo cual procedemos así:

i) Cálculo de $\int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} t^k e^{-t^2} dt$



Consideremos el contorno C de la figura. Entonces

$$\oint_C e^{-t^2} t^k dt = 0.$$

Luego

$$0 = \int_{-R-ic}^{R-ic} e^{-t^2} t^k dt + \int_{AB} e^{-t^2} t^k dt + \int_{R_1}^{-R_1} e^{-t^2} t^k dt + \int_{DE} e^{-t^2} t^k dt.$$

Calculemos separadamente cada una de las integrales de Fourier.

1) Veamos la primera integral: $\int_{AB} e^{-t^2} t^k dt \rightarrow 0$

cuando $R \rightarrow \infty$, porque

$$\left| \int_{AB} e^{-t^2} t^k dt \right| = \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-R_1^2 R_1^k} e^{i\theta} d\theta \right| \leq \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-R_1^2} R_1^{k+1} d\theta \right| = \alpha e^{-R_1^2} R_1^{k+1} \rightarrow 0 \text{ si } R \rightarrow \infty.$$

2) De la misma manera se muestra que $\int_{\frac{D}{E}} e^{-t^2} t^k dt \rightarrow 0$ cuando $R \rightarrow \infty$.

3) Consideremos ahora la tercera integral:

$$\int_{R_1}^{-R_1} e^{-t^2} t^k dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^k dt = \begin{cases} \Gamma((k+1)/2) & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar,} \end{cases}$$

cuando $R \rightarrow \infty$.

4) De 1), 2) y 3) se obtiene

$$\int_{-\infty - ic}^{\infty - ic} t^k e^{-t^2} dt = \begin{cases} \Gamma((k+1)/2) & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

ii) Evaluación de $\mathcal{F}(x^n e^{-x^2/2})$. Tenemos el siguiente resultado:

$$(1) \quad \mathcal{F}(x^n e^{-x^2/2}) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{h=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2h} (ix)^{n-2h} 2^h \Gamma(h + \frac{1}{2})$$

(véase [7]).

iii) Evaluación de $\mathcal{F}(H_n(x) e^{-x^2/2})$. Tenemos el siguiente resultado:

$$(2) \quad \mathcal{F}(H_n(x) e^{-x^2/2}) =$$

$$\frac{2^n n! e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{t=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(ix)^{n-2t}}{(n-2t)!} 2^t \sum_{p=0}^t \frac{(-1)^p \frac{(n-2p)! 2^{-2p}}{(n-2p)! p! (2t-2p)!} \Gamma(t-p-\frac{1}{2})}{(2t)!}$$

Pero además se tiene

$$(3) \quad \sum_{p=0}^t (-1)^p \frac{2^{-p}}{p! 2^{2p} (2t-2p)!} \frac{2^{2p} (2t-2p)! t!}{(2t)! (t-p)!} \Gamma(t+\frac{1}{2}) \\ = \sum_{p=0}^t (-1)^p \frac{t!}{2^p p! (t-p)!} \frac{\Gamma(t+\frac{1}{2})}{(2t)!} = \sum_{p=0}^t (-1)^p \binom{t}{p} \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{\Gamma(t+\frac{1}{2})}{(2t)!}$$

Sustituyendo en (2) la expresión (3), se obtiene

$$\mathcal{F}(H_n(x) e^{-x^2/2}) = i^n (e^{-x^2/2} H_n(x)),$$

de donde obtenemos T. (Para los detalles, ver [7]).

La anterior representación matricial de la transformación de Fourier nos proporcionará una demostración algebraica del conocido teorema de Fourier-Plancherel, en cuya demostración usual se utiliza el método de las funciones características en el espacio $L_2(-\infty, \infty)$.

Observemos también el operador diferencial

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2.$$

Este operador es autoconjugado, de dominio D denso en $L_2(-\infty, \infty)$. Se debe anotar que H no es acotado; luego H no tiene una extensión a todo $L_2(-\infty, \infty)$ y el subespacio lineal determinado por las funciones en (I) está contenido en D . La representación matricial de H en base del sistema (I) está dada por:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5 & \dots \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz T y la matriz H son diagonales, es decir, las funciones (I) son funciones propias del operador T y del operador H , pero la matriz T es acotada, mientras que la H no lo es.

§2 OTRA REPRESENTACION MATRICIAL DE LA TRANSFORMACION DE FOURIER

Los polinomios de Laguerre,

$$(4) \quad \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \quad (0 \leq t < 1)$$

forman un sistema ortonormal. Nuestro objeto ahora es dar

una representación matricial de la transformada de Fourier tomando como base de $L_2(-\infty, \infty)$ los polinomios de Laguerre. Sea $f \in L_2(-\infty, \infty)$ y sean f_1 y f_2 definidas por

$$(5) \quad \begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

entonces $f = f_1 + f_2$, donde $f_1, f_2 \in L_2(-\infty, \infty)$. Utilizando los polinomios de Laguerre, obtenemos el siguiente desarrollo:

$$(6) \quad \begin{aligned} f(x) = f_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x) e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = f_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n L_n(x) e^{x/2} & \text{si } x < 0. \end{aligned}$$

Definimos ahora la siguiente sucesión de funciones ortonormales, las cuales forman una base de $L_2(-\infty, \infty)$:

$$\varphi_{2k+1}(x) = \begin{cases} L_k(x) e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

($k=0, 1, 2, \dots$), y

$$\varphi_{2k}(x) = \begin{cases} L_k(-x) e^{x/2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Ahora calculamos las transformadas de las φ_j , así

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi_{2k+1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} e^{ixy} e^{-y/2} L_k(y) dy \\ \mathcal{F}(\varphi_{2k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} e^{ixy} e^{y/2} L_k(-y) dy \end{aligned}$$

las cuales podemos transformar a las siguientes formas

equivalentes:

$$(8) \quad \mathcal{F}(\varphi_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{h=0}^k (-1)^h \binom{k}{h} \frac{1}{(\frac{1}{2} + ix)^{h+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(k)} \varphi_j$$

$$\mathcal{F}(\varphi_{2k+1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{h=0}^k (-1)^h \binom{k}{h} \frac{1}{(\frac{1}{2} - ix)^{h+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_j^{(k)} \varphi_j$$

donde

$$(9) \quad C_j^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{h=0}^k (-1)^h \binom{k}{h} \frac{1}{(\frac{1}{2} + ix)^{h+1}} \bar{\varphi}_j dx$$

y $\bar{C}_j^{(k)}$ es el conjugado complejo de $C_j^{(k)}$. La representación matricial de la transformación de Fourier es en esta base de la forma siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} 0,432+0,474i & 0,432-0,474i & 0,194 - 0,109i & \dots \\ 0,432-0,474i & 0,432+0,474i & 0,194+0,109i & \dots \\ 0,194-0,109i & 0,194+0,109i & 0,225 - 0,381i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Como podemos observar, en nuestros cálculos iniciales la matriz T es simétrica, lo cual se debe, posiblemente, a propiedades de los polinomios de Laguerre; sería interesante ver si esta propiedad se puede ó no demostrar. Esto constituye un nuevo tema de investigación.

BIBLIOGRAFIA

1. Tom M. Apostol, Análisis Matemático, Reverté (1961) Barcelona.
2. E.W. Hobson, An Introduction to real Analysis, Dover, New York.
3. Yu Takeuchi, Espacios de Hilbert, Universidad Nacional de Colombia (1966), Bogotá.
4. Norbert Wiener, The Fourier Integral...,
5. Laurent Schwartz, Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques, Hermann (1961), Paris.

6. G. Sansone, Orthogonal Functions, Interscience Pub. (1959), New York.
7. Darío Sánchez, Tesis, Universidad Nacional de Colombia, (1966), Bogotá.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

(Recibido en diciembre de 1966)