Boletín de Matemáticas
Volumen II,1968,págs.6-17

OPTIMIZACION DE UN PROCESO DE VARIABLES ENTERAS[1]

por

Francisco LLERAS L.

Es frecuente en los programas técnicos de Computación Electrónica el tener que ordenar una serie de datos numéricos en forma creciente o decreciente, lo cual se efectúa por medio de comparaciones sucesivas.

Si el número de datos por ordenar es grande, el número de comparaciones puede crecer enormemente, lo cual nos lleva a plantearnos el siguiente problema: ¿cuál es el sistema que debe seguirse para que el número de comparaciones sea el menor posible ?

Podemos considerar el hecho de comparar cantidades en un computador para saber cuál es mayor, semejante a la operación de comparar pesos en una balanza de platillos para saber cuál es el mayor; por tanto, podemos plantear el problema de la siguiente manera:

Si se tienen N objetos con pesos diferentes

---

(1) Nota de los editores: Nos parece que en este artículo se ha supuesto a todo lo,largo de él que el proceso admite un óptimo, y que este óptimo se alcanza precisamente en valores enteros de las variables; esto no es de por sí evidente y debe a nuestro juicio ser objeto de un análisis más profundo. Sin embargo, el artículo es lo suficientemente interesante para ser publicado y puesto a consideración de nuestros lectores, pues los resultados obtendios son bastante buenos.

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k,$$

ordenarlos por pesos crecientes (o decrecientes) en el menor número de pesadas, por medio de una balanza de platillos y sin utilizar pesas.

La forma más simple de operar es comparando cada objeto con los restantes, escogiendo siempre el menos pesado (o el más); es claro que en esta forma el número total de operaciones será:

$$(N-1) + (N-2) + \ldots + 2 + 1 = N(N-1)/2 = (N^2 - N)/2 .$$

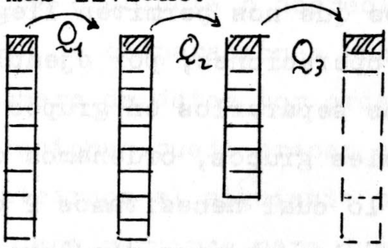
Hay otros procedimientos que nos permiten llegar al mismo resultado con menos operaciones, por ejemplo: si tenemos 4 objetos, podemos separarlos en grupos de 2 objetos, obteniendo 2 de tales grupos, ordenamos de menor a mayor cada grupo, para lo cual necesitamos 2 operaciones, nos basta luego comparar los objetos más livianos de cada grupo entre sí para ir formando el total ordenado; como el último objeto queda por exclusión, necesitaremos para esta fase final un total de $4-1 = 3$ operaciones; hemos, pues, ordenado los cuatro objetos en 5 operaciones; por otra parte, si hubiéramos ordenado simplemente se habrían necesitado $(4 \cdot 3)/2 = 6$ operaciones.

Como vemos en el proceso anterior hay otras técnicas que nos permiten efectuar el proceso de ordenación disminuyendo el número de operaciones. Vale la pena observar que para grupos de menos de 4 objetos no es posible mejorar el sistema de ordenación simple, como lo puede verificar el lector.

Antes de continuar es conveniente definir algunos términos que utilizaremos con frecuencia en este trabajo.

DEFINICION I. Ordenar: Es el conjunto de operaciones consistentes en comparar cada uno de los objetos de un grupo con el resto de ellos escogiendo cada vez el más liviano, para dejar finalmente ordenado dicho grupo.

DEFINICION II. Intercalar k grupos o subgrupos. Es el proceso por el cual ordenamos un grupo final por medio de comparaciones de los elementos más livianos de cada uno de los k subgrupos, previamente ordenados (ver el diagrama ilustrativo), escogiendo siempre el objeto más liviano.



Q_1, Q_2, Q_3 son las operaciones de comparar los primeros elementos de los sugrupos.

El proceso que se muestra en la figura se repite hasta agotar todos los subgrupos, obteniéndose como resultado final un solo grupo ordenado.

Ya vimos anteriormente que para ordenar N objetos es necesario efectuar $N(N-1)/2$ operaciones; veamos cuántas son necesarias para intercalar N objetos de k subgrupos ya ordenados. Supongamos previamente que para cada uno de los primeros $(N-1)$ elementos del grupo final necesitamos efectuar el total de comparaciones entre los primeros elementos de los k subgrupos, o sean $k-1$ comparaciones (para el último no es necesario pues queda por exclusión), calculando luego la economía resultante del paulatino agotamiento de los subgrupos; tendremos entonces que el total de operaciones serían en este caso $(N-1)(k-1)$.

Calculemos la economía de operaciones por el agotamiento: como tarde o temprano se van agotando los subgrupos, el número de comparaciones bajará de $k-1$ a $k-2$, $k-3$, ..., etc.; entonces la economía total será $(k-2)+(k-3)+\ldots+2+1$, o sea que el total de operaciones será

$$(N-1)(k-1) - ((k-2) + (k-3) + \ldots + 2 + 1)$$

o también:

$$N(k-1) - ((k-1) + (k-2) + (k-3) + \ldots + 2 + 1)$$

que podemos escribir

$$(N - \frac{k}{2})(k - 1).$$

Es claro que éste será el número de operaciones que a lo más necesitamos para intercalar los k subgrupos, puesto que como la distribución de los pesos en éstos es aleatoria, bien puede suceder que al agotarse los primeros $k-1$ subgrupos todavía queden en el último más de un objeto, los cuales pueden pasarse al grupo final sin comparaciones, con una economía adicional. Seguiremos en adelante considerando el caso más desfavorable.

Demostraremos ahora que si k grupos de objetos para ordenar e intercalar obteniendo un solo grupo de N objetos ordenados, el número de objetos en cada uno de los k grupos debe ser el mismo, para que el número de operaciones sea el menor posible. Supongamos que el número de objetos de cada grupo sea diferente y sean éstos $x_1, x_2, \ldots, x_k$; tendremos:

$$N = x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \Sigma_{i=1}^{k} x_i$$

Es evidente que el número de operaciones para intercalar es independiente del número de elementos que tenga cada uno de los k grupos, dependiendo solamente del número total de elementos y del número de subgrupos, puesto que el agotamiento de éstos solamente depende de la distribución, como ya vimos; solamente nos interesa analizar el número de operaciones para ordenar estos k grupos, el cual está dado por la siguiente expresión:

$$P = \frac{1}{2}(x_1 - 1)x_1 + \ldots + \frac{1}{2}(x_k - 1)x_k$$

Se trata, pues, de minimizar P sujeto a la condición de que $\Sigma_{i=1}^{k} x_i = N$. Despejando a x_1 en la expresión de N, tendremos $x_1 = N - \Sigma_{i=2}^{k} x_i$ y reemplazando en P, obtenemos:

$$P = \frac{1}{2}\left[(N - \Sigma_{i=2}^{k} x_i)(N - \Sigma_{i=2}^{k} x_i - 1)\right] + \Sigma_{i=2}^{k} x_i(x_i - 1)/2$$

Considerando a x_i como una variable continua, procedemos a derivar con respecto a cada una de las x_i e igualar a cero estas derivadas parciales, para hallar las condiciones del óptimo:

$$0 = \frac{\partial P}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}\left[(N - \sum_{i=2}^{k} x_i) + (N - \sum_{i=2}^{k} x_i - 1)\right] + x_i - \frac{1}{2}$$

Pero $x_1 = N - \Sigma_{i=2}^{k} x_i$, por lo tanto resulta

$$x_1 = x_i \text{ , } i = 2, \ldots, k,$$

o sea

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k.$$

Esto nos indica que para el óptimo todos los grupos deben tener el mismo o casi el mismo número de elementos, dadas las limitaciones de entericidad. Es de suponerse que si al dividir un grupo de N objetos en k_1 subgrupos podemos disminuir el número de operaciones para ordenarlo, al subdividir cada uno de éstos a su vez en k_2 subgrupos y así sucesivamente, hasta obtener subgrupos de orden k_s, es posible disminuir aún más el número de operaciones.

Demostraremos que si efectuamos estas subdivisiones, debemos tener en el óptimo $k_1 = k_2 = \dots = k_s$. Tenemos, pues, k_1 subgrupos con N/k_1 objetos aproximadamente, cada uno de ellos; el número de subgrupos de segundo orden será $k_1 k_2$, cada uno con $N/k_1 k_2$ objetos aproximadamente; en general, los subgrupos de orden j serán $\prod_{i=1}^{j} k_i$ y cada uno de ellos tendrá $N/\prod_{i=1}^{j} k_i$ objetos aproximadamente $(j = 1, \dots, s)$; decimos aproximadamente por las limitaciones impuestas por la entericidad.

Si llamamos P_I el número de operaciones para intercalar y P_O el número necesario para ordenar, tendremos:

$$P_I = \left[\Sigma_{j=1}^{s-1} \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{N}{\prod_{i=1}^{j} k_i} - \frac{k_{j+1}}{2} \right) (k_{j+1} - 1) \right]$$

para las $s-1$ intercalaciones (los subgrupos de orden s no se forman por intercalación sino por ordenación). Por otra parte,

$$P_O = \left[\prod_{i=1}^{s} k_i \right] \frac{N}{2\prod_{i=1}^{s} k_i} \left(\frac{N}{\prod_{i=1}^{s} k_i} - 1 \right) = \frac{N^2}{2\prod_{i=1}^{s} k_i} - \frac{N}{2}$$

para la ordenación de los subgrupos de orden s.

El número total de operaciones, sin contar la intercalación final (que no nos interesa para esta demostración), será entonces $P_T = P_I + P_O$, o sea

$$(1)\quad P_T = \left(\sum_{j=1}^{s-1} \pi_j\left(\frac{N}{\pi_j} - \frac{k_{j+1}}{2}\right)(k_{j+1} - 1)\right) + \frac{N^2}{2\pi} - \frac{N}{2}$$

donde

$$\pi_j = \prod_{i=1}^{j} k_i \quad y \quad \pi = \prod_{i=1}^{s} k_i = \pi_s .$$

Supongamos ahora también que las k_λ son variables continuas; derivando con respecto a k_λ e igualando a cero obtenemos las condiciones del óptimo,* así

$$\frac{\partial P_T}{\partial k_\lambda} = N + \sum_{j=1}^{s-1}\left(-\frac{k_{j+1}}{k_\lambda}\pi_{j+1} + \frac{1}{2k_\lambda}\pi_{j+1}\right) - \frac{N^2 k_\lambda}{2\pi} = 0$$

($\lambda = 0,1,\ldots,s$); o sea

$$Nk_\lambda - \frac{N^2 k_\lambda^2}{2\pi} = \sum_{j=1}^{s-1} (k_{j+1}/2)\pi_{j+1} - \pi_{j+1}/2 = \text{const.}$$

Como esto es válido para todo λ, tendremos

$$Nk_\lambda - N^2k_\lambda^2/2\pi = Nk_{\lambda+1} - N^2k_{\lambda+1}^2/2\pi$$

lo cual implica $k_\lambda = k_{\lambda+1}$, puesto que se tiene

$$k_\lambda - k_{\lambda+1} = N(k_\lambda^2 - k_{\lambda+1}^2)/2\pi$$

Si suponemos entonces que $k_\lambda \neq k_{\lambda+1}$ tenemos

$$1 = N(k_\lambda + k_{\lambda+1})/2\pi$$

y como N/π es el número de objetos que se encuentran en los subgrupos de orden s, tenemos $N/\pi \geq 1$, de donde resulta que $k_\lambda + k_{\lambda+1} \leq 2$, y como k_λ y $k_{\lambda+1}$

son enteros, la única posibilidad es $k_\lambda = k_{\lambda+1} = 1$, lo cual es absurdo.

Podemos pues en la fórmula (1) reemplazar k_i, k_j por k, aumentar un término que nos dé el número de operaciones para la intercalación final obteniendo una fórmula para el total de operaciones del proceso, así:

$$P = N(k-1)(s-1) - \left[\sum_{j=1}^{s-1} (k^{j+2} - k^{j+1})/2\right] + N^2/2k^s - N/2$$

$$+ (N - k/2)(k-1),$$

o sea, efectuando las operaciones,

$$P = N(2s(k-1) - k^{s+1}/N + k/N + N/k^s - 1)/2.$$

Si suponemos a k como continua, N/k^s será el número de objetos en cada subgrupo de orden s, pudiéndose hacer el siguiente cambio de variables:

$$L = N/k^s \quad ; \qquad s = (\log N - \log L)/\log k;$$

por tanto,

$$(2) \qquad P = N(2\log N - \log L)\frac{k-1}{\log k} - \frac{k}{L} + \frac{k}{N} + L - 1\ /2.$$

Como es evidente que existe un k óptimo, veamos qué condiciones debe tener L para este k. Consideramos entonces a k como constante y nuevamente a L como variable continua; derivando (2) con respecto a L e igualando a cero el resultado de esta operación, tendremos:

$$\frac{dP}{dL} = \frac{N}{2} - \frac{2(k-1)}{L.\log k} + \frac{k}{L^2} + 1 = 0,$$

y por lo tanto,

$$(k + L^2)/L^2 = 2(k-1)/L.\log k$$

$$\log k = 2L(k-1)/(k+L^2) .$$

Los diferentes valores que toma L para distintos valores de k $(k>1)$ son:

$k = 2$	$L = 1,72.....$
$k = 3$	$L = 2,38....$
$k = 4$	$L = 3,02.....$
$k = 5$	$L = 3,58.....$
$k = 6$	$L = 4,00.....$

Vemos que los valores anteriores son independientes de N o, en otras palabras, si el k óptimo fuese 4, cualquiera que fuese N deberíamos subdividir todos los grupos hasta obteneer que los últimos tuvieran lo más cerca de 3 objetos que fuese posible, dadas las condiciones de entericidad.

Podemos observar también que si L es mayor que 3, es decir, que si los subgrupos de orden s tuvieran 3 y 4 objetos (debido a las restricciones de entericidad), podemos subdividir los subgrupos de cuatro objetos en 2, disminuyendo el número de operaciones; esto nos indica, dado que se ha demostrado que todos los k_i deben ser iguales, que k no debe tener valores mayores que 4 (ver la tabla de valores de k y L); por lo tanto, k no podrá ser sino 2,3 ó 4.

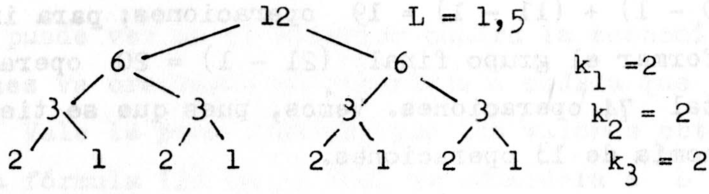
Comparemos primero las posiblidades $k = 2$ y $k = 4$. Para $k = 4$ el óptimo sería cuando uno de los grupos finales tuviera $L = 3$ objetos; tomemos, por ejemplo, 12 objetos; el número total de operaciones sería; para ordenar 4 grupos de 3 objetos:

$$4(3)(2)/2 = 12 .$$

Para intercalarlos en un solo grupo:

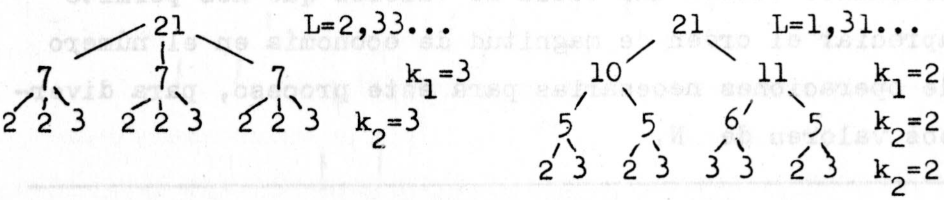
$(12 - 4/2)(4-1) = 30.$

en total 42 operaciones; ahora bien, los 12 objetos podemos subdividirlos en subgrupos de $k = 2$ en la forma que muestra el diagrama siguiente:



Para ordenar los grupos k_3 son necesraias 4 operaciones. Para intercalar y formar los grupos k_2 son necesarias $4(3-1) = 8$ operaciones. Para intercalar y formar los grupos k_1 son necesarias $2(6-1) = 10$ operaciones. Para intercalar y formar el grupo final son necesarias $1(12-1) = 11$ operaciones. En total son necesarias 33 operaciones.

Vemos que hay una economía de 3 operaciones al utilizar $k = 2$ en vez de $k = 4$. Comparemos ahora $k = 3$ con $k = 2$. Tomemos 21 objetos, los cuales dividimos como se muestra en los diagrmas siguientes con $k = 3$ y $k = 2$.



Para $k = 3$ tendremos: Para ordenar los k_2 grupos $6 + 3(3) = 15$ operaciones; para intercalar y formar los k_1 grupos $3(7 - 3/2)(3-1) = 33$ operaciones; para intercalar y formar el grupo final $(21 - 3/2)(3-1) = 39$ operaciones; dando un total de 87 operaciones.

Para $k = 2$; para ordenar los k_4 grupos se necesitan 5 operaciones; para intercalar y formar los k_3 grupos, $5(2) + 3 = 13$ operaciones; para intercalar y formar los k_2 grupos, $3(5-1) + 5 = 17$ operaciones; para intercalar y formar los k_1 grupos se necesitan $(10 - 1) + (11 - 1) = 19$ operaciones; para intercalar y formar el grupo final $(21 - 1) = 20$ operaciones; En total 74 operaciones. Vemos, pues que se tiene una economía de 13 operaciones.

Es claro que para $k = 2$ hemos podido no subdividir sino hasta obtener grupos de 3 y 2, puesto que para ordenar grupos de menos de 4 objetos es indiferente dividir o no, como ya dijimos anteriormente; sin embargo, hemos dividido para obtener un $L = 1{,}31$ lo más cercano al teórico de 1,72, dadas las restricciones de entericidad.

Por todo lo anterior, vemos que la política óptima consiste en subdividir con $k = 2$ hasta obtener en cada uno de los subgrupos finales 2 ó 3 objetos, procediendo a ordenar estos subgrupos e intercalarlos luego de dos en dos hasta obtener en esta forma el grupo final ordenado. Veamos una tabla de valores que nos permite apreciar el orden de magnitud de economía en el número de operaciones necesarias para este proceso, para diversos valores de N.

N	Ordenación simple	Mínima contada	Economía	Calculada con fórmula (2)
4	6	5	17	5
10	45	27	40	25

20	190	73	62	68
50	1225	237	81	234
100	4950	573	88	568
200	19900	1345	93	1335
400	79.800	3089	96	3071

Como se puede ver en el anterior cuadro la economía de operaciones va creciendo en pocentaje a medida que aumenta N. Vale la pena observar que los valores obtenidos con la fórmula (2) en la cual se considera a L como una variable continua, corresponden bastante bien con los del mínimo que fueron contados directamente.

Para terminar, quiero agradecer al profesor E. CARO CAYZEDO por sus acertadas críticas al original de este trabajo, las cuales hicieron posible su mejor presentación.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

(Recibido en marzo de 1968)