Boletín de Matemáticas

VOLUMEN II Marzo de 1968 FASCICULO 1 - 2

EL PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA

por

Arturo GRIGORI

Es bien conocido el papel fundamental que desempeña el principio de inducción matemática o inducción completa en las matemáticas elementales. Igualmente es bien sabido que con frecuencia el principiante muestra duda y vacilación en aceptar la validez de dicho principio y, en consecuencia, no lo aplica efectivamente para demostrar proposiciones matemáticas.

Aunque corrientemente se suele considerar el principio de inducción matemática como un axioma que expresa una propiedad característica de los números naturales, hay que distinguir claramente entre la inducción empírica, la cual se emplea en las ciencias naturales y cuya validez se establece experimentalmente, y la inducción matemática que representa un procedimiento de carácter analítico, cuya validez se establece por medio de un razonamiento puramente lógico. Es decir, el principio de inducción matemática es una verdad matemática - un teorema.

La demostración de este teorema puede basarse en el principio del menor entero positivo o de la buena ordenación de los enteros positivos que se expresa así:

Todo subconjunto S, no vacío , de los enteros positivos contiene un elemento menor que todos los demás. Un elemento a es el mínimo del conjunto S si a satisface las dos condiciones:

1. $a \in S$

2. $a \leq x$, para todo x en S.

Cuando tal elemento mínimo existe, es único. Puesto que si existieran dos tales elementos a y b, entonces tendríamos $a \leq b$ y $b \leq a$, lo cual implica $a = b$.

EL TEOREMA DE INDUCCION MATEMATICA. Sea M un subconjunto, no vacío, de los enteros positivos N; S el complemento de M en N y $P(n)$ una proposición matemática asociada con cada entero positivo $n \in M$ tal que:

I. La proposición $P(1)$ es cierta, o sea $1 \in M$.

II. Supuesta la verdad de la proposición $P(k)$, en donde k es un entero cualquiera ≥ 1, ésta implica la verdad de la proposición $P(k+1)$. Es decir, cuando $k \in M$ entonces $k+1 \in M$.

Entonces la proposición $P(n)$ es cierta para todo n, o sea $M = N$.

Demostración: Supongamos que el conjunto S no es vacío donde $S = \{s$; s es un entero positivo y $P(s)$ es falsa$\}$. Si S no es vacío, entonces por el principio del menor entero, S contiene un entero mínimo x, tal que $P(x)$ es falsa. Pero, por hipótesis, $P(1)$ es cierta, esto es $1 \in M$. Por lo tanto $1 \notin S$, luego $s \neq 1$. Puesto que no hay entero positivo menor que 1, $x > 1$, lo que implica que $x - 1$ es un entero positivo que no pertenece a S (x es el mínimo elemento de S). Así $x-1$ debe estar en M, o sea $p(x-1)$ es cierta. Así que, por hipótesis, y por la propiedad de clausura de los enteros positivos con respecto a la adición, resulta $P(1+(x-1)) = P(x)$. Es decir, $P(x)$ es verdadera, o lo que es lo mismo, $x \in M$, contrariamente a la suposición sobre la falsedad de $P(x)$ (ó $x \in S$). Esta contradicción prueba que S es vacío y $M = N$, de modo que $P(n)$ es cierta para todo $n \in N$.

Hemos demostrado así el teorema de la inducción matemática suponiendo *a priori* el principio del menor entero. En el fondo estas dos proposiciones son lógicamente equivalentes. Es decir, el principio del menor entero puede, a su vez, deducirse como una consecuencia de la propiedad de la inducción matemática, lo cual enunciamos como el

TEOREMA DEL MENOR ENTERO. <u>Todo subconjunto A, no vacío, de los números enteros positivos contiene un elemento menor que todos los demás de</u> A.

Demostración: Si $1 \in A$, entonces 1 es el entero mínimo de A. Si $1 \notin A$ y A no es vacío, sea B un subconjunto de enteros positivos b tales que $b < a$ para todo $a \in A$. Entonces $1 \in B$ puesto que $1 \notin A$. Como A no es vacío, B no contiene todos los enteros positivos. Por lo tanto, B no puede poseer la propiedad de inducción matemática. Es decir, $b + 1 \notin B$ cuando $b \in B$, pues en este caso B contendría todos los enteros positivos, lo que sería una contradicción con la hipótesis de que A no es vacío. Por lo tanto, existe un entero positivo $b' \in B$, pero de modo que $b' + 1 \notin B$. A, por otro lado, debe contener un entero a' que satisfaga la desigualdad $a' \leq b'+1$. Comprobaremos ahora que a' es el menor entero de A. Por hipótesis, cualquier otro elemento a_i de A satisface la relación $b' < a_i$, o bien $b'+x = a_i$, en donde x es un entero positivo ≥ 1. De $a' \leq b'+1$ se sigue que $a' \leq b'+1 \leq b'+x = a_i$; de donde $a' \leq a_i$. Esto es, todo elemento a_i de A es mayor o igual a a', o sea a' es el menor entero de A. Por lo tanto queda demostrado el teorema.

Frecuentemente es preciso modificar el teorema de la inducción matemática para hacerlo aplicable a comprobaciones de ciertos tipos de fórmulas o proposiciones del modo siguiente:

TEOREMA. Si $P(n)$ es una proposición sobre los enteros positivos con las propiedades:

I. $P(x)$ es válida, x un entero.

II. La validez de la proposición $P(k+1)$ se sigue de la de $P(k)$ para todo $k \geq x$,

entonces $P(n)$ es válida para todo $n \geq x$.

Demostración: Para demostrar este teorema definimos $Q(y) = P(y-1+x)$, siendo y un entero positivo. Como $Q(1) = P(x)$, $Q(1)$ es válida por hipótesis. Sea $Q(k)$, o lo que es equivalente $P(k-1+x)$, y supongamos que es válida para un $k \geq 1$. Por II., la verdad de $P(k-1+x)$ implica la verdad de $P((k+1)-1+x) = P(k+x)$. Por otra parte, $P(k+x) = Q(k+1)$. Por lo tanto $Q(k+1)$ es válida cuando $Q(k)$ lo es. Vemos, pues, que por el teorema de inducción completa, $Q(y)$ es cierta para todo entero positivo, y, por consiguiente, $P(n)$ es válida para todo $n \geq x$, que es lo que deseábamos demostrar.

Fácilmente se ve que este teorema es una consecuencia del teorema de inducción completa.

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia.
(Recibido: agosto de 1967)

NUEVA MESA DIRECTIVA DE LA SOCIEDAD COLOMBIANA DE MATEMATICAS

En la última asamblea general de la Sociedad Colombiana de Matemáticas se eligió Junta directiva con el siguiente resultado:

Presidente: Jaime LESMES CAMACHO
Vicepresidente: Jairo CHARRIS CASTANEDA
Secretario-Tesorero: Víctor Hugo PRIETO
Jefe de Publicaciones: Víctor ALBIS GONZALEZ
Vocales: Nello ALLAN
Alberto MEDINA PEREA
Yu TAKEUCHI

En la misma Asamblea se aprobó una comisión que cree el Comité Permanente de Bachillerato, encargado de guiar, empredner y realizar estudios tendientes a mejorar la enseñanza de las Matemáticas en el nivel medio.