SOBRE UN PROBLEMA DE MAXIMIZACION Y UNA NUEVA SERIE PARA e .

por
Francisco LLERAS

Dado un número real S estrictamente positivo, nos proponemos hallar N números $X_o, \ldots, X_N$, reales estrictamente positivos, tales que su suma sea S y que su producto P sea máximo. Sean, pues,

$$S = \sum_{i=o}^{N} X_i \qquad y \qquad P = \prod_{i=o}^{N} X_i ,$$

donde $S \geq X_i \geq 0$. Usando

$$X_o = s - \sum_{i=1}^{N} X_i$$

tenemos

$$(1) \qquad P = \left[S - \sum_{i=o}^{N} X_i \right] . \prod_{i=o}^{N} X_i .$$

Derivando (1) con respecto a X_k, resulta

$$\frac{\partial P}{\partial X_k} = - \prod_{i=1}^{N} X_i + \left[S - \sum_{i=o}^{N} X_i \right] . \frac{\prod_{i=1}^{N} X_i}{X_k}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial P}{\partial X_k} = \frac{\prod_{i=1}^{N} K_i}{X_k} \left[-X_k + S - \Sigma_{i=1}^{N} X_i \right]$$

para $k = 0, \ldots, N$. Tomando $\partial P / \partial X_k = 0$, $k=0,1,\ldots,N$, obtenemos vondiciones para que la función P tome un valor máximo. Como

$$(\prod_{i=1}^{N} X_i)/X_k \neq 0,$$

debe tenerse

$$-X_k + S - \sum_{i=1}^{N} X_i = - X_o + S - \sum_{i=1}^{N} X_i ,$$

( ) El autor agradece las valiosas sugerencias de los Redactores del Boletín.

de donde

$$X_k = X_o = S/(N+1), \text{ para } k = 0,\dots, N.$$

Es decir, todos los sumandos deben ser iguales entre sí si queremos que P tome un valor máximo. Podemos, pues, replantear el problema inicial en la forma siguiente:

Dado un número real estrictamente positivo S, hallar un número entero N, estrictamente positivo, tal que si $X = S/N$ la función $P(X) = X^N$ sea máxima en el punto S/N. Pero como $N = S/X$, se trata entonces de maximizar a $P(X) = X^{S/X}$ sujeta a la condición de que S/X debe ser un entero positivo.

Suponiendo que «X varía de manera continua», tenemos

$$\log P(X) = \frac{S}{X} \log X \ ,$$

de donde, derivando con respecto a X,

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{S}{X^2} (1 - \log X) \ .$$

O sea

$$P'(X) = SP(X)(1 - \log X)/X^2 \ .$$

Ahora P puede tomar un valor máximo cuando $P'(X) = 0$; como $S.P(X) \neq 0$, esto sólo ocurre cuando $\log X = 1$, es decir, cuando $X = e$. Veamos que se trata efectivamente de un máximo; para ello aplicamos el criterio de la segunda derivada, así :

$$P''(X) = \frac{S}{X^2}(1 - \log X)P'(X) + P(X)\left[-\frac{2S}{X^3}(1-\log X) - \frac{S}{X^3}\right],$$

y entonces $P''(e) = -P(e)S/e^3$; como S, $P(e)$ y e^3 son todos positivos, $P''(e) < 0$, luego en e , P toma un valor máximo.

De lo anterior se deduce inmediatamente que si $S \leq e$, P considerada como función de N, es decir, $P(N) = (S/N)^N$, en el sistema de coordenadas NOP, tendrá la forma que a-

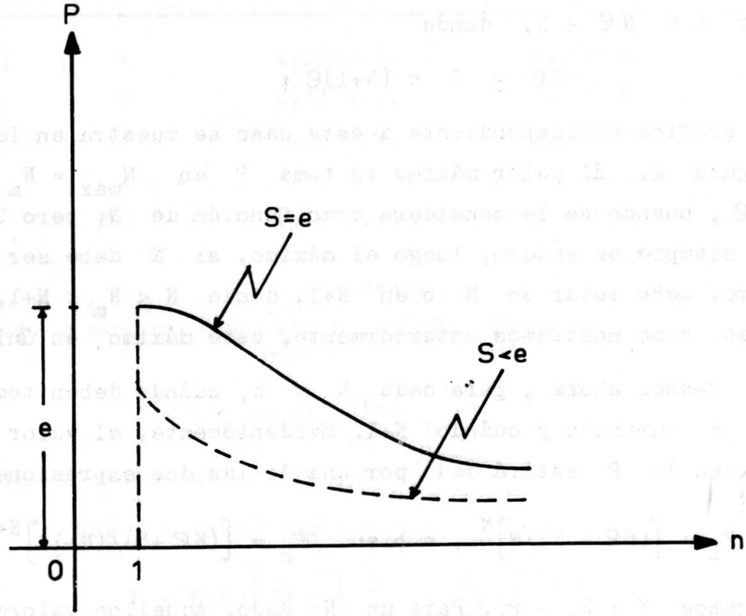
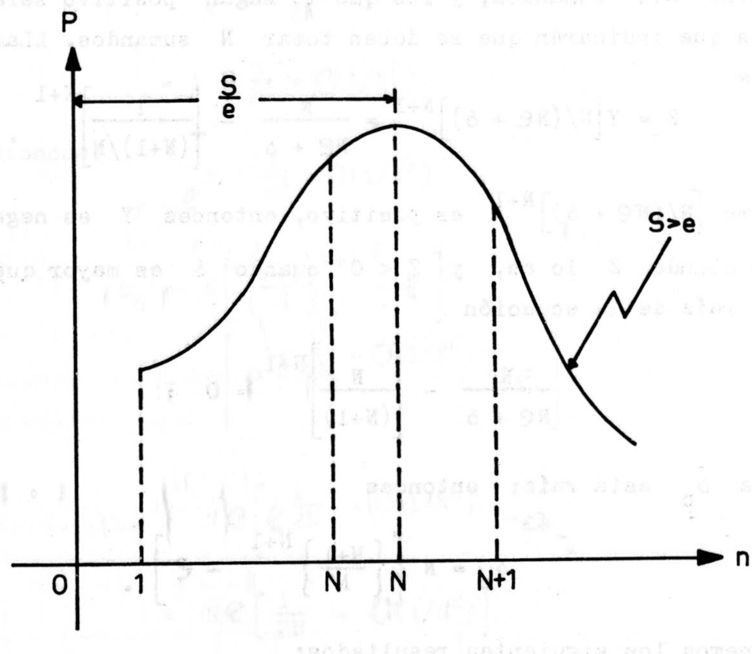


FIG. 1



parece en la figura 1. Cuando $S > e$, podemos escribir $S = Ne + \delta$, donde

$$Ne \leq S < (N+1)e \ ;$$

la gráfica correspondiente a este caso se muestra en la figura 2. El valor máximo lo toma P en $N_{máx} = N_m = S/e$, cuando se le considera como función de N; pero S/e no siempre es entero, luego el máximo, si N debe ser entero, debe estar en N o en $N+1$, donde $N \leq N_m < N+1$, pues, como mostramos anteriormente, este máximo es único.

Veamos ahora, para cada N y δ, cuándo deben tomarse N sumandos y cuándo $N+1$. Evidentemente, el valor máximo de P estará dado por una de las dos expresiones:

$$P_1 = \left[(Ne + \delta)/N\right]^N \text{ , o bien } P_2 = \left[(Ne + \delta)/(N+1)\right]^{N+1}.$$

Hagamos $Y = P_1 - P_2$. Para un N dado, aquellos valores de δ que hagan negativo a Y nos indicarán que deben tomarse $N+1$ sumandos, y los que lo hagan positivo serán los que indicarán que se deben tomar N sumandos. LLamemos

$$Z = Y\left[N/(Ne + \delta)\right]^{N+1} = \frac{N}{Ne + \delta} - \left[\frac{1}{(N+1)/N}\right]^{N+1}.$$

Como $\left[N/(Ne + \delta)\right]^{N+1}$ es positivo, entonces Y es negativo cuando Z lo es, y $Z < 0$ cuando δ es mayor que la raíz de la ecuación

$$\frac{N}{Ne + \delta} - \left[\frac{N}{(N+1)}\right]^{N+1} = 0 \ ;$$

sea δ_o esta raíz; entonces

$$\delta_o = N\left[\left\{\frac{N+1}{N}\right\}^{N+1} - e\right].$$

Tenemos los siguientes resultados:

N	δ_o	$Ne + \delta_o$
1	1,2812...	4,000;;;
2	1,3134...	6,08833...
3	1,3266...	9,481481...
. . .	. . .	. . .
10	1,3483...	28,53115...

<<<<o>>>>

Vamos a mostrar que $\lim_{n\to\infty} \delta_o = e/2$. Llamemos

$$y = \left[(N+1)/N\right]^{N+1};$$

tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\log y &= (N+1)\log(1 + 1/N)\\ &= (N+1)\left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + O(1/N^3)\right]\\ &= \frac{N+1}{N} - \frac{N+1}{2N^2} + O(1/N^2)\\ &= 1 + \frac{1}{2N} + O(1/N^2).\end{aligned}$$

Entonces:

$$y = e^{1 + \frac{1}{2N} + O(1/N^2)}$$

y

$$\begin{aligned}\delta_o &= N\left[\left\{\frac{N+1}{N}\right\}^{N+1} - e\right]\\ &= N\left[e^{1+\frac{1}{2N} + O(1/N^2)} - e\right]\\ &= Ne\left[e^{\frac{1}{2N} + O(1/N^2)} - 1\right]\\ &= Ne\left[\frac{1}{2N} + O(1/N^2)\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{e}{2} + O(1/N).$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \delta_o = e/2$, pues $O(1/N) \to 0$ cuando $N \to \infty$.

(Para la notación O, ver [1].)

Se puede también obtener el anterior límite, $\lim_{n\to\infty} \delta_o$, formalmente de la siguiente manera:

$$N\left[\left\{\frac{N+1}{N}\right\}^{N+1} - e\right] = N\left[(1+\frac{1}{N})^{N+1} - e\right]$$

$$= N\left[1 + \frac{N+1}{N} + \sum_{k=2}^{N+1} \frac{(N+1)N(N-1)\ldots(N-k+2)}{k!\,N^k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right]$$

$$= N\left[(\frac{N+1}{N} - \frac{1}{1!}) + \sum_{k=2}^{N+1}\frac{1}{k!}\,(1+\frac{1}{N})(1)(1-\frac{1}{N})\ldots(1-\frac{k-2}{N}) - 1\right]$$

$$+ - N\cdot\sum_{k=N+2}^{\infty}\frac{1}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{N+1}\frac{N}{k!}\left\{\frac{1-(1+2+\ldots+(k-2))}{N} + O(1/N^2)\right\}$$

$$- N\sum_{k=N+2}^{\infty}\frac{1}{k}\ .$$

Si fuese posible cambiar el orden de la sumatoria $\Sigma_{k=2}^{N+1}$ y el límite cuando $N \to \infty$ en la última expresión, es decir,

$$\lim_{N\to\infty}\Sigma_{k=2}^{N+1} \ldots = \Sigma_{k=2}^{\infty}\lim_{N\to\infty}\ldots,$$

entonces se tendría:

$$(4) \quad \lim_{N\to\infty} N\left[\left\{\frac{N+1}{N}\right\}^{N+1} - e\right] = 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-(1+2+\ldots+(k-2))}{k!}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{2-(k-1)(k-2)}{2(k!)}\ ,$$

puesto que $\lim\limits_{N\to\infty} N\cdot \Sigma_{k=N+2}^{\infty} (1/k!) = 0$. En realidad, se puede demostrar que la expresión en (4) es igual a $e/2 = \lim\limits_{N\to\infty} \delta_o$, como sigue. Sea

$$Q = 1 + \frac{1}{2!} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2-(k-1)(k-2)}{2(k!)} ,$$

entonces:

$$2(e - Q) = 2\left[\sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k!} - \left\{1 + \frac{1}{2!} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2-(k-1)(k-2)}{2(k!)}\right\}\right]$$

$$= 2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)}{k!} = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)k}{(k+2)!}$$

$$(5) \quad = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2) - (k+1) + 1}{(k+2)!}$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{(k-1)!(k+1)} - \frac{1}{k!(k+2)}\right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!}$$

$$= 2 + \frac{1}{0!2} + \left\{e - (1 + 1 + \frac{1}{2!})\right\} = e .$$

Así, $2(e - Q) = e$, ó $Q = e/2$.

En el procedimiento anterior, encontramos una nueva expresión, en (5), para e:

$$(6) \quad e = 2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)}{k!} = 2 + \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k!(k+3)} .$$

Esta serie converge más rápidamente que la clásica; en efecto, comparemos algunos valores.

VALORES DE LAS SERIES:

N	Clásica	Nueva
0	1,0000....	2,3333.....

1	2,0000....	2,5833.....
2	2,5000....	2,6833.....
3	2,6666.....	2,7111.....
4	2,70833....	2,71706.....

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Recibido, abril de 1967.

REFERENCIAS:

1. APOSTOL, T.M.: Calculus, vol.I, Blaisdell: Nueva YorK, 1960.