Boletín de Matemáticas

VOLUMEN I   Marzo de 1967   FASCICULO 1 - 2

SOBRE LOS CONCEPTOS DE ABSTRACCION Y DE TRANSFERENCIA

por

CARLO FEDERICI CASA

0. La motivación.- El motivo fundamental del presente escrito es el de mostrar cómo la matemática moderna puede ayudar algunos conceptos de la psicología, y en el caso presente los de abstracción y de transferencia, conceptos tan fundamentales en el proceso del aprendizaje.

1. La abstracción.- Considérese la clase Sgm de los segmentos, concretados en palitos o regletas. Considérese el aparato Plm compuesto del pulgar y del índice, en proceso de oposición, aparato que se puede considerar como un palmer. Entonces los Sgm se pueden clasificar en una clase de clases por medio de su inter-sustituibilidad (Iss) con respecto al Plm. Se dice también que la clase Sgm ha sido dividida o particionada en sub-clases por medio de la inter-sustituibilidad con respecto al Plm.

Se usa escribir la operación de clasificar o dividir o particionar la clase delos Sgm (dividendo) por medio de la relación (de equivalencia) Iss con respecto de aparato Plm (divisor) y el resultado relativo Lng(cociente), que por lo dicho, resulta ser una clase de clases, de la manera siguiente:

$$\mathrm{Sgm}/\mathrm{Iss}(\mathrm{Plm}) = \left\{\begin{array}{c} A,\ A',\ \ldots \\ B,\ B',\ \ldots \\ \cdot \\ \vdots \end{array}\right\} / \mathrm{Iss}(\mathrm{Plm}) = \left\{\begin{array}{c} \{A,\ A',\ldots\} \\ \{B,\ B',\ldots\} \\ \cdot \\ \vdots \end{array}\right\} = \mathrm{Lng}$$

o menos prolijamente

$$\mathrm{Sgm}/\mathrm{Iss}(\mathrm{Plm}) = \mathrm{Lng}$$

Es fácil darse cuenta de que si a una sub-clase de Sgm, elemento de Lng,

le pertenece l segmento A, entonces a la misma le pertenecen todos y sólo los demás segmentos A', A'', ... que son intersustituibles con A, es decir, los que tienen la misma longitud de A como comúnmente se dice.
Entonces cada elemento de Lng, que es una sub-clase de Sgm, es una longitud; respectivamente: la longitud de A, la longitud de B, ... y por lo tanto la clase de clases Lng es la clase de todas las longitudes, es decir, es longitud a secas.

Si se dice que Sgm es lo concreto y que Lng es lo abstracto, entonces se debe decir que la división que ha transformado lo concreto en lo abstracto es el proceso que comúnmente se llama abstracción, y más precisamente abstracción extensional, siguiendo a WHITEHEAD y RUSSELL.

Considérese ahora las clases Sgm y Lng respectivamente como dominio y codominio de la función ln que a cada S de Smg hace corresponder la clase de los X de Sgm que son inter-sustituibles con S, es decir:

$$S \rightsquigarrow \{S, S', \dots\} = \{X \mid X \text{ Iss } (\text{Plm})\ S\}$$

Esta funcióm se debe llamar necesariamente la longitud de y es evidente que

$$\text{ln } S = \{S, S', S'', \dots\} = \{X \mid X \text{ Iss } (\text{Plm}) S\} .$$

Se tiene finalmente el esquema:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sgm} & & \text{Lng} \\ \left\{\begin{matrix} A, A', \dots \\ B, B', \dots \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} & \xrightarrow{\text{ln}} & \left\{\begin{matrix} \{A, A', \dots\} \\ \{B, B', \dots\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} \end{array}$$

o menos prolíjamente

$$\text{Sgm} \xrightarrow{\text{ln}} \text{Lng} \text{ , e}$$

en donde la función ln aparece como un proyector de cine desarrollando el papel de abstractor.

1.2. Las fases de la abstracción.- En el proceso de la abstracción que precede se pueden distinguir las siguientes fases:

a) Los segmentos A y B son inter-sustituibles con respecto al aparato Plm y dentro de un bien determinado manipuleo.
b) Los segmentos A y B son equilargos.
c) La longitud de A es la clase de todos los segmentos equilargos con A.

d) Longitud es la clase de todas las longitudes.

La fase a) es de clasificación. Las fases b), c) y d) son de simbolización; en particular, la palabra equilargo es símbolo del manipuleo con relación al aparato Plm. Nótese que en dichas fases la palabra longitud aparece disfrazada en tres formas:

*) en la relación «ser un equilargo de»

**) en la función «la longitud de»

***) en la propiedad «longitud».

Es obvio que el análisis hecho de la abstracción que lleva de lo concreto, Sgm, a lo abstracto, Lng, es válido en cualquier caso.

2. La transferencia.- Considérese ahora, dentro de las clases Sgm, la operación $+_s$, de adición, que a la 2-pla ordenada $\langle A, B \rangle$ de segmentos, hace corresponder un segmento, que se usa indicar $A +_s B$, según la definición común y corriente de la Geometría elemental.

La relación Iss de inter-sustituibilidad entre segmentos, relación que se usa llamar a menudo congruencia, es conveniente ahora indicarla de la manera usual: $\equiv$. La Geometría elemental sugiere que la operación $+_s$ goce de las propiedades que a continuación se enuncian: Si A, B, C, D, ... son segmentos

$$1) \quad \begin{cases} A +_s B \equiv D \quad \text{es un segmento} \\ (A +_s B) +_s C \equiv A +_s (B +_s C) \\ A +_s O_s \equiv A \\ A +_s C \equiv B +_s C \quad \text{entonces} \quad A \equiv B \\ A +_s B \equiv B +_s A, \end{cases}$$

en donde O_s indica cualquier segmento degenerado, es decir, un segmento reducido a un singuleto de puntos. Las propiedades arriba enunciadas se usan a denominar respectivamente, clausurativa, asociativa, modulativa, cancelativa, y conmutativa.

El hecho de que la operación $+_s$ goce de las propiedades arriba enunciadas se expresa diciendo que: la clase Sgm tiene estructura de cuasi-grupo con respecto a la operación $+_s$.

Si A, B, C, ... , A'. B', C', ... son segmentos, se define, en general, la suma de dos clases de Sgm de la manera siguiente:

$$\{A, B, C, \dots\} +_\lambda \{A', B', C', \dots\} = \begin{Bmatrix} A +_s A', & A +_s B', & A +_s C', \dots \\ B +_s A', & B +_s B', & B +_s C', \dots \\ C +_s A', & C +_s B', & C +_s C', \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{Bmatrix}$$

Es fácil darse cuenta de que si A y B son segmentos, y si $\ln A = \{A, A', A'', \ldots\}$ y $\ln B = \{B, B', \ldots\}$, entonces se tiene que:

$$A +_s B \equiv A +_s B' \equiv A +_s B'' \equiv \ldots \equiv \ldots$$
$$A' +_s B \equiv A' +_s B' \equiv A' +_s B'' \equiv \ldots \equiv \ldots$$
$$A'' +_s B \equiv A +_s B' \equiv A +_s B'' \equiv \ldots \equiv \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{L}$$

y, por lo tanto,

$$\ln (A +_s B) = \ln A +_\lambda \ln B,$$

o, también: «la longitud de una suma de segmentos es la suma de sus longitudes».

Ahota si llamamos <u>objeto</u>, <u>proyector</u> e <u>imagen</u> respectivamente, a un segmento, a la función ln y a la longitud del segmento, se puede expresar lo anterior diciendo: ln es un proyector particular que a la suma de dos objetos hace corresponder como imágen, la suma de las respectivas imágenes, lo cual se hace evidente con el siguiente esquema:

$$\begin{matrix} A \rightsquigarrow \ln A \\ B \rightsquigarrow \ln B \end{matrix} \quad ; \quad A +_s B \rightsquigarrow \ln A +_\lambda \ln B.$$

Es fácil demostrar que la operación $+_\lambda$ goza de las mismas propiedades de que goza la operación $+_s$, y por lo tanto, se puede afirmar algo análogo a lo expresado en (1), es decir: <u>la clase Lng tiene estructura de cuasi - grupo con respecto a la operación</u> $+_\lambda$. En efecto:

a) $\ln A +_\lambda \ln B = \ln (A +_s B) = \ln D.$

b) $(\ln A +_\lambda \ln B) +_\lambda \ln C = \ln (A +_s B) +_\lambda \ln C = \ln ((A +_s B) +_s C)$

$= \ln (A +_s (B +_s C)) = \ln A +_\lambda \ln (B +_s C)$

$= \ln A +_\lambda (\ln B +_\lambda \ln C).$

c) $\ln A +_\lambda 0_\lambda = \ln A +_\lambda \ln 0_s = \ln (A +_s 0_s) = \ln A.$

d) $\ln A +_\lambda \ln C = \ln B +_\lambda \ln C \Rightarrow \ln (A +_s C) = \ln(B +_s C) \Rightarrow$

$A +_s C \quad B +_s C \Rightarrow A \quad B \Rightarrow \ln A = \ln B.$

e) $\ln A +_\lambda \ln B = \ln (A +_s B) = \ln (B +_s A) = \ln B +_\lambda \ln A.$

Una función como ln que, combinada con una operación $+_s$, <u>induce</u> una operación como $+_\lambda$, que goza de las mismas propiedades que $+_s$, se llama un <u>homomorfizador</u>. La importancia de um homomorfizador radica precísamente en lo siguiente: toda propiedad de la cual goce la operación objetal $+_s$ viene inducida o transferida, por medio del homomorfizador ln a la operación imaginal $+_\lambda$.

Lo que precede se puede expresar más sintéticamente de la manera siguiente: La función ln (que es abstractor de dominio $\underset{\approx}{Sgm}$ y codominio $\underset{\approx}{Lng}$) induce o transfiere la estructura de casi-grupo de $\underset{\approx}{Sgm}$, con respecto a $+_s$, a $\underset{\approx}{Lng}$ con respecto a $+_\lambda$, y esto nos permite decir que la función ln, que desarrolló en principio el papel de abstractor desarrolla ahora el papel de inductor o de - transferidor.

De lo que precede se puede concluír que:

a) La <u>transferencia</u> es un <u>proceso</u> realizado por un <u>transferidor</u>.

b) Un <u>transferidor</u> es la combinación, en general, de un <u>abstractor</u> con una <u>operación</u> o <u>relación</u>.

c) La función específica de un <u>transferidor</u> es la de <u>transferir</u> <u>estructuras</u> (de un <u>sistema</u> a otro <u>sistema</u>).

Con el análisis anterior quedan mejor precisados, aunque tal vez más restringidos, los conceptos que tan fundamental papel juegan en psicología: los conceptos de <u>abstracción</u> y de <u>transferencia</u>

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.

(Recibido febrero 1965)